Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Seconda prova scritta intermedia

Anno accademico 2012/2013

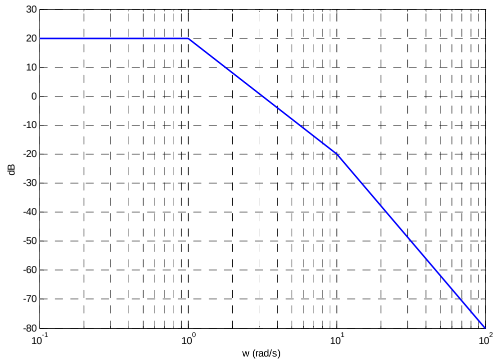
27 Giugno 2013

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Il diagramma di Bode del modulo di L taglia l'asse a 0 dB approssimativamente alla pulsazione 3 rad/s.



Calcolo del margine di fase:

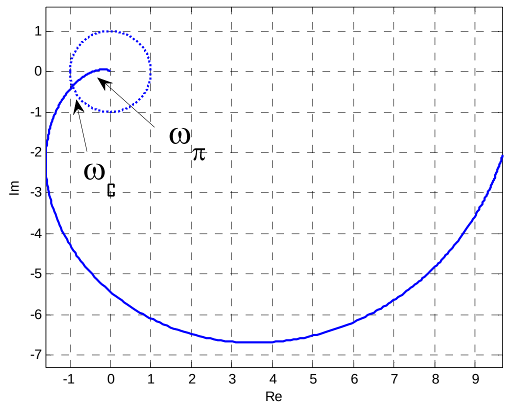
$$\varphi_c = -2\arctan\left(\frac{3}{1}\right) - \arctan\left(\frac{3}{10}\right) = -2\times 71.5° - 16.7° = -159.7°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_m = 21.3°$$

In base al criterio di Bode il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

1.2

Il diagramma polare di L si traccia facilmente tenendo conto che la fase passa da 0 a –270°.



Il punto corrispondente a ω_c, utilizzato per il calcolo del margine di fase, si trova all'intersezione del diagramma con la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Il punto corrispondente a ω_π, utilizzato per il calcolo del margine di guadagno, si trova all'intersezione del diagramma con il semiasse reale negativo.

1.3

Poiché il margine di fase è piccolo, è opportuno approssimare la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso con quella di un sistema del secondo ordine:

$$F(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2}$$

Lo smorzamento ξ dei poli può essere valutato con la formula:

$$\xi = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) = 0.18$$

Tempo di assestamento al 99%: $\tau_{a1} = \dfrac{\ln(100)}{\xi\omega_c} = \dfrac{4.6}{0.18\times 3} = 8.52$

1.4

Il termine aggiuntivo non modifica il diagramma di Bode del modulo ma dà un decremento di margine di fase:

$$\varphi_m = 21.3° - 2\arctan(3\tau) > 0 \quad \Rightarrow \quad \arctan(3\tau) < 10.65° \quad \Rightarrow \quad \tau < \frac{\tan(10.65°)}{3} = 0.0627$$

Esercizio 2

2.1

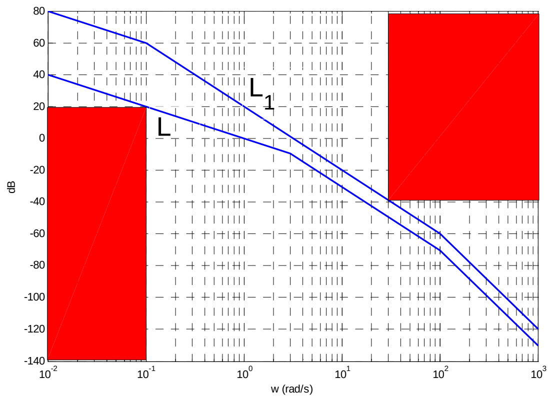
Per ottenere errore nullo a regime, occorre una funzione di trasferimento d'anello di tipo 1. Poiché il sistema sotto controllo è di tipo 0, il regolatore deve essere di tipo 1, mentre il guadagno del regolatore è arbitrario:

Il requisito di attenuazione del disturbo in linea d'andata comporta che: $\left|L(j\omega)\right| \geq 20\text{dB}, \quad \omega \leq 0.1$

Il requisito di attenuazione del disturbo in linea di retroazione comporta che: $\left|L(j\omega)\right| \leq -40\text{dB}, \quad \omega \geq 30$

Per il progetto dinamico, consideriamo la funzione di trasferimento:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{100}{s(1+10s)(1+0.01s)}\,.$$



Tracciandone il diagramma di Bode del modulo, ci si rende subito conto, dal taglio dell'asse a 0 dB con pendenza –2, che il margine di fase è negativo o del tutto insufficiente. Si sceglie allora di tagliare alla pulsazione 1, mantenendo il diagramma di $|L|$ parallelo a quello di $|L_1|$ in bassa frequenza, aggiungendo un polo alla pulsazione 3 e mantenendo il polo alla pulsazione 100. In questo modo sono facilmente soddisfatti anche i vincoli di attenuazione dei disturbi.

Si ottiene:

$$\omega_c = 1$$

$$\varphi_c = -90° - \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{100}\right) = -90° - 18.4° - 0.6° = -109°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_m = 71°$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte, e risulta:

$$L(s) = \frac{1}{s(1+0.33s)(1+0.01s)}\,,$$

da cui:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{0.01}{s}\frac{(1+10s)}{(1+0.33s)}\,.$$

2.2

Poiché $G(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema con due poli reali, la sua risposta in frequenza non raggiunge mai valori inferiori a –180°, ossia il margine di guadagno è infinito e le regole di Ziegler e Nichols in anello chiuso non sono applicabili (aumentando il guadagno d'anello non si porta il sistema al limite di stabilità). La risposta allo scalino in anello aperto presenta un flesso, per cui le regole in anello aperto sono applicabili.

2.3

Il ritardo intrinseco di conversione è pari a $T/2$, dove T è il tempo di campionamento. Il decremento di margine di fase è quindi:

$$\Delta\varphi_m = -\omega_c \frac{T}{2}\frac{180°}{\pi} = -90°\frac{\omega_c}{\Omega_N} = -5° \quad \Rightarrow \quad \frac{\Omega_N}{\omega_c} = 18 \quad \Rightarrow \quad \Omega_N = 18 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\pi}{\Omega_N} = 0.174$$

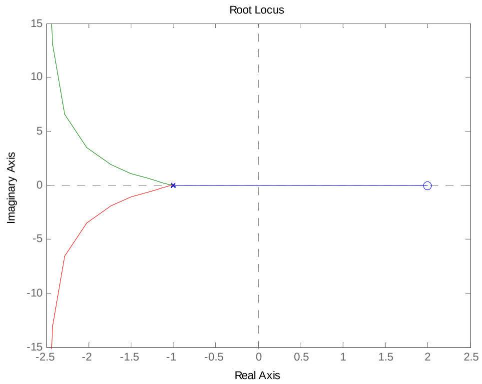
Esercizio 3

3.1

Risulta $m = 1$, $n = 3$, $z_1 = -2$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$. Vi sono quindi due asintoti, il cui punto di intersezione è:

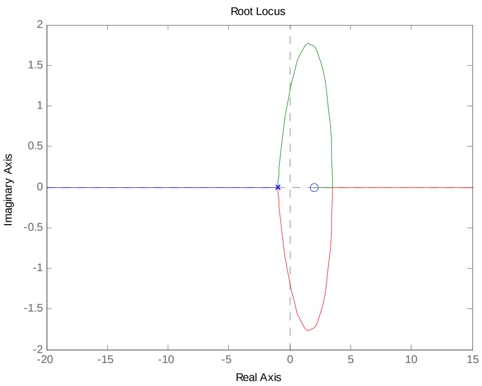
$$x_a = \frac{\sum z_i - \sum p_i}{n-m} = \frac{-2-(1+1+1)}{2} = -\frac{5}{2}$$

Luogo diretto:



3.2

Luogo inverso:



3.3

Utilizzando la regola di punteggiatura in $\bar{s} = 0$ per il luogo diretto:

$$\rho_M = \frac{1\times 1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Poiché la somma delle parti reali dei poli si conserva e vale -3, si può punteggiare il luogo inverso nel punto $\bar{s} = -3$:

$$\rho_m = -\frac{2\times 2\times 2}{5} = -\frac{8}{5}$$

Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se: $-\frac{8}{5} < \rho < \frac{1}{2}$

3.4

Sempre per la regola di conservazione della somma delle parti reali dei poli si può punteggiare il luogo inverso nel punto $\bar{s} = -2$:

$$\bar{\rho} = -\frac{1\times 1\times 1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Esercizio 4

4.1

Il sistema ha due poli immaginari $z_{1,2} = \pm\frac{1}{2} j$.

Essendo i poli a modulo minore di 1, il sistema è asintoticamente stabile.

4.2

$$Y(z) = G(z)\frac{z}{z-1} = \frac{z}{4z^2+1}$$

Teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{4z^2+1} = 0$$

Teorema del valore finale (applicabile per l'asintotica stabilità del sistema):

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}[(z-1)Y(z)] = \lim_{z\to\infty} \frac{z(z-1)}{4z^2+1} = 0$$

4.3

Applicando il metodo della lunga divisione:

$$\begin{array}{l|l}
z & 4z^2+1 \\
z+\frac{1}{4}z^{-1} & \frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{16}z^{-3}+\frac{1}{64}z^{-5}+\cdots \\
\hline
-\frac{1}{4}z^{-1} & \\
-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{16}z^{-3} & \\
\hline
\frac{1}{16}z^{-3} &
\end{array}$$

Pertanto:

$y(0) = 0$, $y(1) = \frac{1}{4}$, $y(2) = 0$, $y(3) = -\frac{1}{16}$, $y(4) = 0$, $y(5) = \frac{1}{64}$.

4.4

Risulta:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{z-1}{4z^2+1} = \frac{0.25z-0.25}{z^2+0.25} = \frac{0.25z^{-1}-0.25z^{-2}}{1+0.25z^{-2}}$$

e quindi:

$$\left(1+0.25z^{-2}\right)Y(z) = \left(0.25z^{-1}-0.25z^{-2}\right)U(z),$$

Ricordando il significato operatoriale di z^{-1} (ritardo di un passo), si ottiene:

$$y(k) = -0.25y(k-2)+0.25u(k-1)-0.25u(k-2)$$