Fondamenti di Automatica

Prof. Bascetta

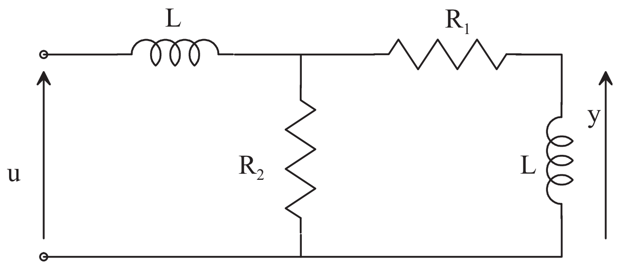
17 Aprile 2019

SOLUZIONE

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
PROFF. LUCA BASCETTA, PAOLO ROCCO E GIAN PAOLO INCREMONA

PRIMA PROVA INTERMEDIA
17 APRILE 2019

ESERCIZIO 1
Si consideri la rete elettrica riportata in figura:



1. Si scrivano le equazioni del sistema che descrive la dinamica della rete.

   Detta x_1 la corrente nel primo induttore e x_2 la corrente nel secondo, la dinamica del sistema è retta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} u &= L\dot{x}_1 + R_2(x_1 - x_2) \\ R_2(x_1 - x_2) &= R_1 x_2 + L\dot{x}_2 \\ y &= R_2(x_1 - x_2) - R_1 x_2 \end{aligned}$$

   Pertanto il sistema dinamico si scrive come:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R_2}{L}x_1 + \frac{R_2}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 &= \frac{R_2}{L}x_1 - \frac{R_1 + R_2}{L}x_2 \\ y &= R_2 x_1 - (R_1 + R_2)x_2 \end{aligned}$$

2. Posto $L = 1$, $R_1 = 3$ e $R_2 = 2$ si determini la funzione di trasferimento del sistema.

   Con i valori dati, si ottiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Si può quindi calcolare la funzione di trasferimento come:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -2 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{(s+2)(s+5)-4} \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+5 & 2 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{2s}{s^2+7s+6}
\end{aligned}$$

3. Si determini il valore dell'uscita y quando l'ingresso assume il valore costante $u = \bar{u} = 2$, fornendo anche un'interpretazione fisica del risultato.

   Poiché il guadagno statico del sistema è nullo:

$$G(0) = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = 0$$

   a fronte di un ingresso costante l'uscita è nulla. Si osservi che l'uscita è la caduta di tensione sul secondo induttore, che a regime è nulla, essendo l'induttore un corto circuito.

4. Si scriva l'espressione analitica dell'uscita del sistema ($y(t) = \dots$) quando l'ingresso è $u(t) = 2sca(t)$, verificando che il valore iniziale sia coerente con il teorema del valore iniziale.

   La trasformata di Laplace dell'uscita ha la seguente espressione

$$Y(s) = G(s)\frac{2}{s} = \frac{4}{(s+1)(s+6)}$$

   e può essere decomposta, utilizzando il metodo di Heaviside, come segue

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s+1} + \frac{\alpha_2}{s+6} = \frac{\alpha_1(s+6)+\alpha_2(s+1)}{(s+1)(s+6)}$$

   Imponendo l'uguaglianza tra il precedente numeratore e il numeratore originale di $Y(s)$ per i valori $s = -1$ e $s = -6$, si ottengono i seguenti valori dei parametri

$$\alpha_1 = \frac{4}{5} \qquad \alpha_2 = -\frac{4}{5}$$

   La decomposizione di $Y(s)$ può essere quindi riscritta come segue

$$Y(s) = \frac{4}{5}\frac{1}{s+1} - \frac{4}{5}\frac{1}{s+6}$$

   e, antitrasformando, si ricava

$$y(t) = \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{4}{5}e^{-6t} \qquad t \geq 0$$

   Il valore iniziale della risposta risulta quindi:

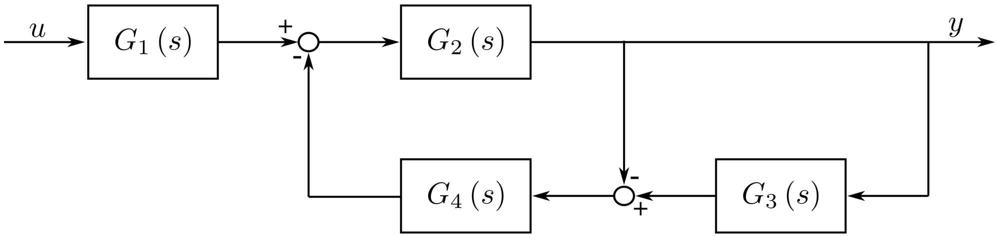
$$y(0) = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0$$

   Dal teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty}[sY(s)] = \lim_{s\to\infty}\frac{4s}{(s+1)(s+6)} = 0$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente schema a blocchi:



1. Si determini la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$.

   Dallo schema a blocchi si riconosce la presenza di un blocco $G_1(s)$ in serie ad una retroazione. All'interno della retroazione è presente un parallelo tra $G_3(s)$ e una funzione di trasferimento unitaria. La funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ è data da

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_4(s)\,(G_3(s) - 1)}$$

2. Con riferimento alla funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ si risponda, motivando adeguatamente la risposta, alle seguenti domande:

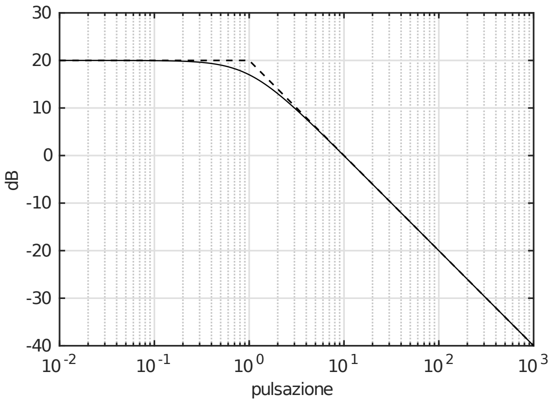
   (a) è necessario che $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ siano asintoticamente stabili perché lo sia il sistema nel suo complesso?

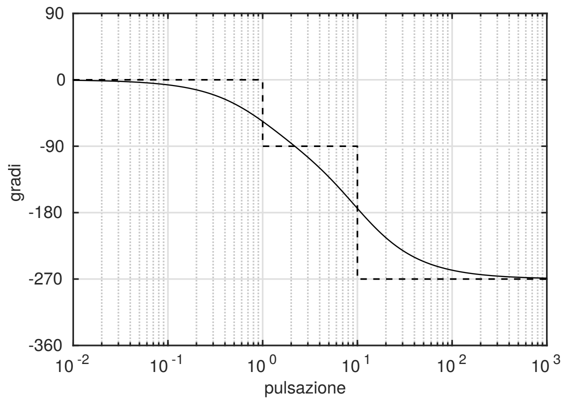
   $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ sono incluse in un anello di retroazione, non è quindi necessario che siano asintoticamente stabili perché lo sia il sistema.
   $G_1(s)$ è in serie alla retroazione, è quindi necessario che sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema.

   (b) è sufficiente che $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ siano asintoticamente stabili perché lo sia il sistema nel suo complesso?

   $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ sono incluse in un anello di retroazione, non è quindi sufficiente che siano asintoticamente stabili perchè lo sia il sistema.
   $G_1(s)$ è in serie alla retroazione, non è quindi sufficiente che sia asintoticamente stabile poiché la stabilità del sistema dipende anche dalla stabilità della retroazione.

3. I diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza della funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ sono mostrati nella figura seguente:





(a) Si determini il guadagno di tale funzione di trasferimento.

Dall'analisi dei diagrammi di Bode di modulo e fase per $\omega \to 0$ si deduce che il guadagno è positivo e pari a 10 (20 dB).

(b) Si determinino i poli e gli zeri della funzione di trasferimento.

Dall'analisi dei diagrammi di Bode asintotici di modulo e fase si deduce che la funzione di trasferimento è caratterizzata da due poli reali nel semipiano sinistro, in -1 e -10, e da uno zero reale nel semipiano destro, in 10.

(c) Si precisi, motivando la risposta, se il sistema è a fase minima o a fase non minima.

Il sistema non è a fase minima poiché è presente uno zero nel semipiano destro.

4. Posto $u(t) = \sin(0.01t) + 10\sin(10t)$, si determini, nel modo più rapido possibile, l'espressione, anche approssimata, dell'uscita $y(t)$ a transitorio esaurito.

Detta $H(s)$ la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$, dai diagrammi di Bode esatti del modulo e della fase si ricava

$$|H(j0.01)| = 10 \quad \angle H(j0.01) = 0^\circ \qquad |H(j10)| = 1 \quad \angle H(j10) \approx -180^\circ$$

L'uscita a transitorio esaurito sarà quindi

$$y(t) = 10\sin(0.01t) + 10\sin(10t - \pi)$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema dinamico non lineare invariante e a tempo continuo in forma di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) - 4x_2(t) - x_1(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -x_3^2(t) + x_1(t)x_2(t) + \alpha^2 u(t) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}$$

1. Si determinino gli equilibri dello stato e dell'uscita corrispondenti all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$ in funzione del parametro reale positivo α.

   All'equilibrio le equazioni del sistema diventano:

   $$\begin{aligned}
   0 &= -\bar{x}_1 + 1 \\
   0 &= \bar{x}_1^2 - 4\bar{x}_2 - \bar{x}_1 \\
   0 &= -\bar{x}_3^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 + \alpha^2 \\
   \bar{y} &= \bar{x}_1
   \end{aligned}$$

   Dalla prima equazione si ricava $\bar{x}_1 = 1$ e sostituendo alla seconda equazione si ricava $\bar{x}_2 = 0$. Sostituendo, infine, $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ nella terza equazione si ottiene che $\bar{x}_3 = \pm\alpha$.
   Riassumendo il sistema ha i seguenti equilibri

   (a) $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = \alpha$ e $\bar{y} = 1$;
   (b) $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = -\alpha$ e $\bar{y} = 1$;

2. Si enunci il teorema di asintotica stabilità di un generico stato di equilibrio $\bar{x}$ di un sistema non lineare.

   Se tutti gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ del sistema linearizzato corrispondente hanno parte reale negativa, lo stato di equilibrio $\bar{x}$ del sistema non lineare è asintoticamente stabile.

3. Si studi la stabilità degli equilibri calcolati al punto precedente in funzione del parametro reale positivo α.

   Il sistema linearizzato nel generico equilibrio ha equazioni

   $$\begin{aligned}
   \delta\dot{x}_1(t) &= -\delta x_1(t) + \delta u \\
   \delta\dot{x}_2(t) &= (2\bar{x}_1 - 1)\,\delta x_1(t) - 4\delta x_2(t) \\
   \delta\dot{x}_3(t) &= \bar{x}_2\delta x_1(t) + \bar{x}_1\delta x_2(t) - 2\bar{x}_3\delta x_3(t) + \alpha^2\delta u(t) \\
   \delta y(t) &= \delta x_1(t)
   \end{aligned}$$

   la cui matrice della dinamica è

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2\bar{x}_1 - 1 & -4 & 0 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 & -2\bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

In corrispondenza dell'equilibrio $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = \alpha$ la matrice della dinamica risulta

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2\alpha \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono gli elementi sulla diagonale, ossia, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = -2\alpha$. Concludiamo, quindi, che il corrispondente sistema linearizzato è asintoticamente stabile $\forall\, \alpha > 0$, di conseguenza, l'equilibrio del sistema non lineare è anch'esso asintoticamente stabile.
In corrispondenza dell'equilibrio $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = -\alpha$ la matrice della dinamica risulta

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = 2\alpha$. Concludiamo, quindi, che il corrispondente sistema linearizzato è instabile $\forall\, \alpha > 0$, di conseguenza, l'equilibrio del sistema non lineare è anch'esso instabile.

4. Posto $\alpha = 1$ e scelto uno dei sistemi linearizzati calcolati al punto precedente, si spieghi se esso è completamente raggiungibile e/o completamente osservabile.

In corrispondenza dell'equilibrio $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 1$ il sistema è descritto dalle seguenti matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e le matrici di raggiungibilità e osservabilità saranno

$$\mathbf{K}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{\mathrm{O}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{K}_{\mathrm{R}}$ ha determinante non nullo, quindi il sistema linearizzato è completamente raggiungibile, mentre la matrice $\mathbf{K}_{\mathrm{O}}$ ha determinante nullo, quindi il sistema linearizzato non è osservabile.