Fondamenti di automatica

(Prof. Bascetta)

Seconda prova scritta intermedia

Anno accademico 2009/2010

30 Giugno 2010

Cognome:..

Nome: ....

Matricola:...............................

Firma:.......................................

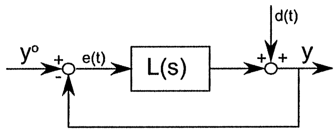
Avvertenze:

- Il presente fascicolo si compone di **8** pagine (compresa la copertina). Tutte le pagine utilizzate vanno firmate.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula per nessun motivo se non consegnando il compito o ritirandosi.
- Nei primi 30 minuti della prova non è consentito ritirarsi.
- Durante la prova non è consentito consultare libri o appunti di alcun genere.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici con display grafico.
- Le risposte vanno fornite **esclusivamente negli spazi** predisposti. Solo in caso di correzioni o se lo spazio non è risultato sufficiente, utilizzare l'ultima pagina del fascicolo.
- La chiarezza e l'**ordine** delle risposte costituiranno elemento di giudizio.
- Al termine della prova va consegnato **solo il presente fascicolo**. Ogni altro foglio eventualmente consegnato non sarà preso in considerazione.

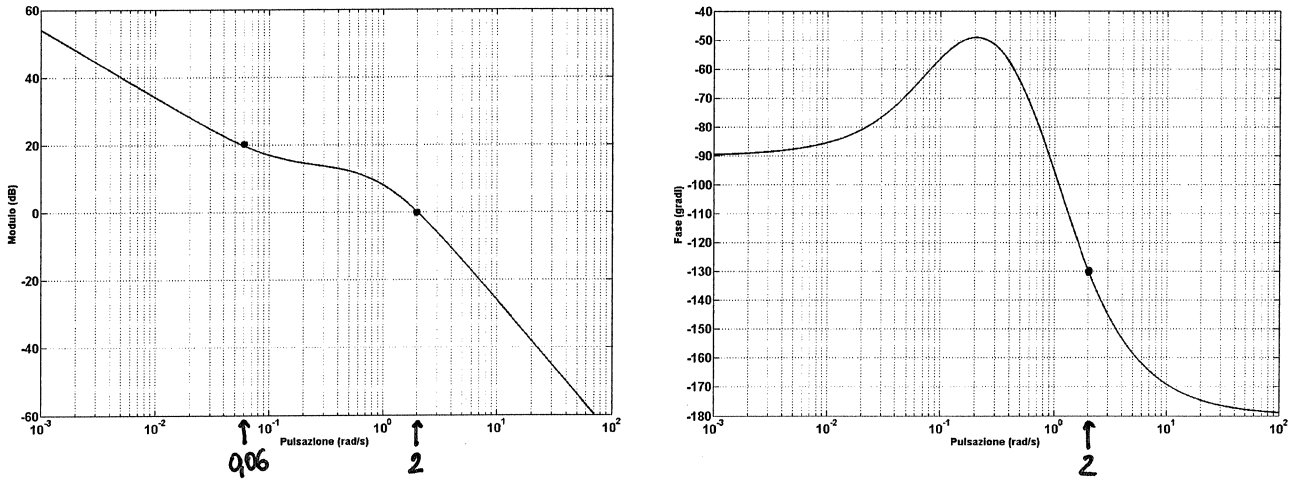
Utilizzare questa pagina SOLO in caso di correzioni o se lo spazio a disposizione per qualche domanda non è risultato sufficiente

Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico retroazionato



dove $d(t)=\sin(0.06t-\pi/12)$ e $L(s)$ ha il seguente diagramma del modulo e della fase



1.1 Si determinino ω_c e φ_m, e si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso.

Dal grafico $\omega_c = 2$ rad/s e $\varphi_c = -130°$

Quindi $\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 50°$

Dal diagramma di fase si ricava inoltre $\mu_L > 0$ e si può verificare l'applicabilità del criterio di Bode.

Per il criterio di Bode il sist. in anello chiuso è as. stabile

1.2 Si determini il fattore di attenuazione del disturbo d sull'uscita y.

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+L(s)}$$ Per $\omega < \omega_c \Rightarrow \left|\frac{1}{1+L(j\omega)}\right| \simeq \frac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|_{dB}$

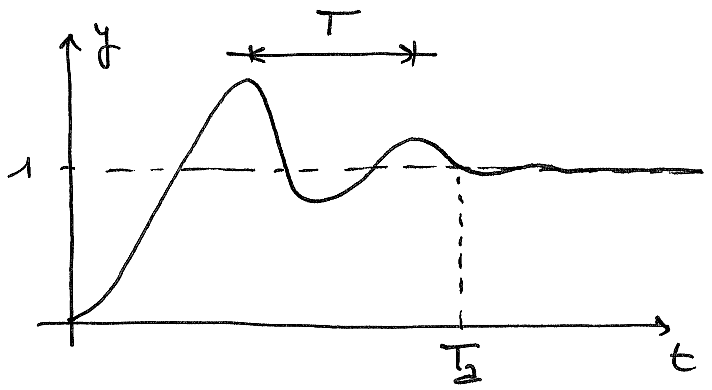
Il fattore di attenuazione è pari a $-|L(j\bar{\omega})|_{dB}\Big|_{\bar{\omega}=0,06 \text{ rad/s}} = -20\text{dB} = \frac{1}{10}$

1.3 Si tracci l'andamento qualitativo dell'uscita y a fronte di uno scalino unitario sul riferimento y^o, indicando chiaramente il valore di y a transitorio esaurito, la pulsazione naturale e lo smorzamento di eventuali oscillazioni.

Essendo $\varphi_m = 50°$ $\quad F(s) \simeq \frac{\omega_c^2}{s^2+2\xi\omega_c s+\omega_c^2} = \frac{4}{s^2+2s+4}$

$$\xi = \frac{50}{100} = 0{,}5$$

$F(0) = 1 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t) = 1$

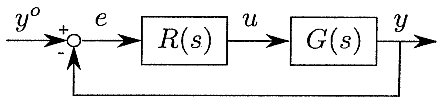


$T_a = \dfrac{5}{\xi \omega_c} = 5s$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_c} = \pi\, s$

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema di controllo



dove $G(s) = \dfrac{10}{(1+0.1s)(1+10s)} e^{-2s}$.

2.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- $|e_\infty| = 0$ quando $y^o(t) = sca(t)$;
- $R(s)$ sia un regolatore PID e sia causale;
- il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale di 55°;
- la pulsazione critica ω_c sia la massima possibile.

$R(s)$ PID implica $R(s) = k_P \left(1 + \dfrac{1}{sT_I} + sT_D\right) = k_P \dfrac{s^2 T_I T_D + sT_I + 1}{sT_I}$

ovvero c'è un integratore e ci sono due zeri. E' necessario, poi, aggiungere un polo per la causalità del regolatore.

Quindi: $R(s) = \mu \dfrac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{s(1+sT)}$

La presenza dell'integratore garantisce $e_\infty = 0$ in presenza di uno scalino sul riferimento.

I due zeri del PID sono utili per cancellare i due poli di $G(s)$

$R(s) = \mu \dfrac{(1+0{,}1s)(1+10s)}{s(1+sT)}$

$L(s) = \dfrac{\mu}{s(1+sT)} \cdot 10\, e^{-2s}$

Supponiamo che il polo in $-1/T$ sia in alta frequenza e non influisca sulla pulsazione critica e sul margine di fase, allora

$$L(s) \simeq \frac{\mu}{s} \cdot 10 e^{-2s}$$

$$\Rightarrow \omega_c = 10\mu \text{ rad/s}$$

$$\varphi_c = -90° - 10\mu \cdot 2 \cdot \frac{180°}{\pi} \Rightarrow \varphi_m = 90° - 20\mu \cdot \frac{180°}{\pi}$$

Ponendolo $90° - 20\mu \cdot \frac{180°}{\pi} = 55°$ si ricava $\mu = \frac{1}{20} \cdot 35° \cdot \frac{\pi}{180°} \simeq 0{,}03$

Scegliamo infine il polo in alta frequenza in modo che sia una decade dopo la pulsazione critica $\Rightarrow T = \frac{1}{10\omega_c} = \frac{1}{100\mu} \simeq \frac{1}{3}$ s

Quindi: $R(s) = 0{,}03 \dfrac{(1+0{,}1s)(1+10s)}{s(1+s/3)}$

2.2 Si dica, motivando la risposta, quale dei seguenti segnali di riferimento può essere correttamente riprodotto sull'uscita dal sistema in anello chiuso:

$$y^o(t) = 5\sin(0.01t),\ y^o(t) = -\cos(0.02t),\ y^o(t) = 2\sin(100t - \pi/2).$$

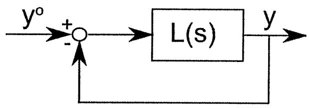
Essendo $\omega_c = 0{,}3$ rad/s il sistema in anello chiuso può riprodurre solo i primi due segnali di riferimento.

2.3 Si dica, motivando la risposta, se al sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è applicabile il metodo empirico di taratura di Ziegler e Nichols in anello chiuso.

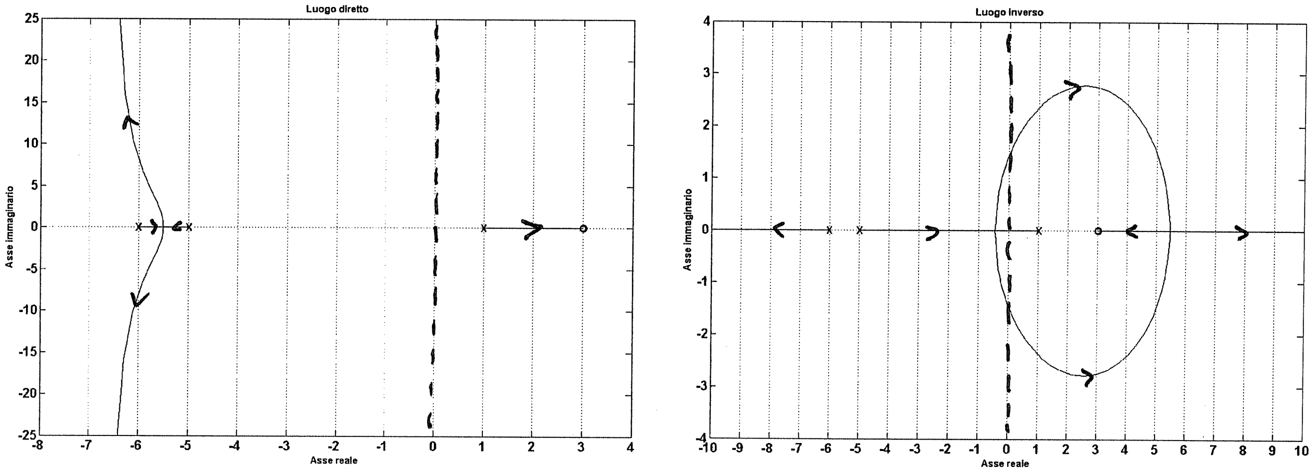
Sì poichè $G(s)$ ha margine di guadagno finito.

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema di controllo



I luoghi descritti dai poli del sistema in anello chiuso al variare della costante di trasferimento di $L(s)$ sono rappresentati nelle figure seguenti



3.1 Sulla base dei luoghi, si determini l'insieme dei valori di ρ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Per $\rho > 0$ il sistema è sempre instabile, c'è sempre un autovalore nel semipiano destro.

Per $\rho < 0$ $\exists \bar{\rho}$: due poli sono sull'asse immaginario. Poichè vale la regola del baricentro quando due poli sono sull'asse immaginario il terzo si trova in -10

$$\bar{s} = -10 \Rightarrow |\bar{\rho}| = \frac{4 \cdot 5 \cdot 11}{13} \cong 16{,}92$$

Si ha quindi asintotica stabilità per $\rho > -16{,}92$.

Il polo nel semipiano destro diventa as. stabile per $\rho < -10$

$$\bar{s} = 0 \quad |\bar{\rho}| = \frac{6 \cdot 5 \cdot 1}{3} = 10$$

Si conclude quindi: $-16{,}92 < \rho < -10$

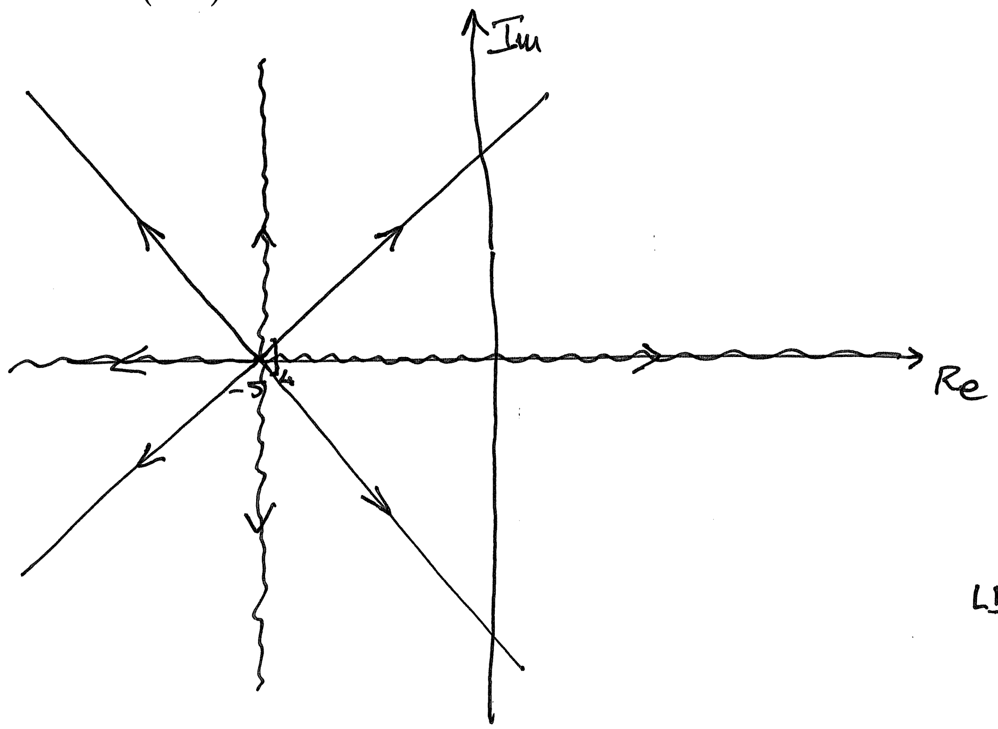
3.2 Sulla base dei luoghi, si determini il valore di ρ per cui il sistema in anello chiuso ha tre poli reali di cui due coincidenti in -0.45. Si dica quanto vale il terzo polo.

Per la regola del baricentro quando due poli sono in $-0{,}45$ il terzo sarà in $-9{,}1$.

$$\bar{s} = -0{,}45 \quad |\rho| = \frac{5{,}55 \cdot 4{,}55 \cdot 1{,}45}{3{,}45} \cong 10{,}61$$

Poichè tali poli appartengono al luogo inverso si ha $\rho = -10{,}61$

3.3 Sia $L(s) = \dfrac{\rho}{(s+5)^4}$. Si traccino i luoghi delle radici diretto e inverso.



~ LI

— LD

$$x_a = -\frac{5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} = -5$$

$$\theta_a = \begin{cases} \text{LD} & \dfrac{180° + h\,360°}{4} = \begin{cases} 45° \\ 135° \\ 225° \\ 315° \end{cases} \\ \text{LI} & \dfrac{h\,360°}{4} = \begin{cases} 0° \\ 90° \\ 180° \\ 270° \end{cases} \end{cases}$$

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.5x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) - 0.5x_2(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) + 0.5x_3(k) \end{cases}$$
$$y(k) = x_3(k)$$

4.1 Si discuta la stabilità del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Poichè la matrice è diagonale i suoi autovalori sono +0,5, -0,5, +0,5 e poichè tutti hanno modulo < 1 il sistema è asintoticamente stabile

4.2 Si ricavi la funzione di trasferimento del sistema dinamico e se ne specifichi il guadagno.

Supponendo $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$

$$\begin{cases} zX_1 = 0{,}5X_1 + U \\ zX_2 = X_1 - 0{,}5X_2 \\ zX_3 = X_2 + 0{,}5X_3 \\ Y = X_3 \end{cases}$$

$$X_1 = \frac{U}{z-0{,}5} \qquad X_2 = \frac{X_1}{z+0{,}5} = \frac{U}{(z-0{,}5)(z+0{,}5)}$$

$$X_3 = \frac{X_2}{z-0{,}5} = \frac{U}{(z-0{,}5)^2(z+0{,}5)}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{1}{(z-0{,}5)^2(z+0{,}5)}$$

$G(z)$ non ha nè poli nè zeri in $z=1$, il suo guadagno è quindi $\mu = G(1) = \frac{1}{0{,}5^2 \cdot 1{,}5} \cong 2{,}67$

4.3 Si supponga che l'ingresso assuma l'espressione $u(k) = 3\sin(2k)$. Senza eseguire i relativi conti, si spieghi come si potrebbe ricavare l'andamento dell'uscita $y(k)$ a transitorio esaurito.

Poichè il sistema è asintoticamente stabile dal teorema della risposta in frequenza si ricava

$$y(k) = |G(e^{j2})| \sin\left(2k + \measuredangle G(e^{j2})\right)$$