

Prima prova scritta intermedia 2008/2009
Soluzione **Tema A (1 nota)**

Bascetta

Esercizio 1

1.1

Scelti come stati i livelli dei serbatoi nel rispettivo ordine, si ha

$$\begin{aligned}A_1\dot{x}_1 &= -k_1x_1 \\A_2\dot{x}_2 &= k_1x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + u \\A_3\dot{x}_3 &= k_2x_2 \\y &= k_3x_2\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{k_1}{A_1}x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{k_1}{A_2}x_1 - \frac{k_2 + k_3}{A_2}x_2 + \frac{1}{A_2}u \\ \dot{x}_3 &= \frac{k_2}{A_3}x_2 \\ y &= k_3x_2\end{aligned}$$

1.2

All'equilibrio si ricavano le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 0 \\ \bar{x}_2 &= 0 \\ \bar{u} &= 0 \\ \bar{y} &= 0\end{aligned}$$

mentre il livello del serbatoio 3 (\bar{x}_3) è arbitrario.

Non esistono equilibri per $\bar{u} \neq 0$, infatti se la portata in ingresso non fosse nulla il livello del serbatoio 3, che non ha portata uscente, continuerebbe a crescere.

1.3

Con i valori dei parametri dati nel testo la matrice dinamica del sistema risulta

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tale matrice ha due autovalori reali negativi ed uno nullo, si conclude quindi che il sistema è semplicemente stabile.

1.4

Con i valori dei parametri dati nel testo le matrici di raggiungibilità ed osservabilità del sistema risultano

$$K_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$K_O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ed hanno entrambe determinante nullo. Si conclude quindi che il sistema non è né completamente raggiungibile, né completamente osservabile.

1.5

Con i valori dei parametri dati nel testo la funzione di trasferimento del sistema risulta

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Sebbene il sistema nello spazio di stato abbia ordine 3, la sua funzione di trasferimento ha denominatore di ordine 1 a causa della presenza di parti non raggiungibili e non osservabili che non si manifestano nel legame ingresso-uscita.

Esercizio 2

2.1

La risposta mostrata in figura è compatibile con un sistema del primo ordine con zero nel semipiano destro (sistema a fase non minima), ovvero con funzione di trasferimento:

$$G(s) = \mu \frac{1+s\tau}{1+sT}$$

Dal grafico si può ricavare il valore della costante di tempo T che è pari a $0.2 s$. I parametri rimanenti si ricavano utilizzando i teoremi del valore iniziale e finale come segue

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mu \frac{1+s\tau}{1+sT} \frac{1}{s} = \frac{\mu\tau}{T} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0) = \mu = -5$$

Si ricava infine

$$\tau = -\frac{1}{25}$$

La funzione di trasferimento compatibile con il diagramma sarà quindi

$$G(s) = -5 \frac{1 - 0.04s}{1 + 0.2s}$$

2.2

La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = 1 - 0.2t$ nel dominio delle trasformate di Laplace ha la seguente espressione

$$Y(s) = -\frac{5}{s} \frac{1 - 0.04s}{1 + 0.2s} + \frac{1}{s^2} \frac{1 - 0.04s}{1 + 0.2s}$$

Tale espressione si scompone, utilizzando il metodo di Heaviside, come segue

$$Y(s) = -\frac{5}{s} + \frac{1.2}{1 + 0.2s} + \frac{1}{s^2} - \frac{0.24}{s} + \frac{0.048}{1 + 0.2s}$$

La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = 1 - 0.2t$ ha la seguente espressione analitica

$$y(t) = -5.24 + 6.24e^{-5t} + t \quad t \geq 0$$

2.3

Il sistema è asintoticamente stabile, la risposta asintotica a $u(t) = 0.2 \sin(5t)$ si ricava con il teorema della risposta in frequenza. Essa ha la seguente espressione

$$y(t) = 0.2|G(j5)| \sin(5t + \angle G(j5))$$

dove

$$|G(j5)| = 5 \frac{|1 - j0.04 \cdot 5|}{|1 + j0.2 \cdot 5|} \approx 3.6$$

$$\angle G(j5) = -\pi + \arctan(-0.2) - \arctan(1) \approx -4.12$$

Esercizio 3

3.1

Lo stato di equilibrio si ricava dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(\bar{x}_2 + 2)\bar{u} + \bar{x}_3^2 + \bar{x}_2 &= 0 \\ \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2^2 + \bar{u} &= 0 \\ \bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{u} &= 0\end{aligned}$$

la cui soluzione con $\bar{u} = 0$ è $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$, a cui corrisponde l'uscita $\bar{y} = 0$.

3.2

Linearizzando il sistema si ricava

$$\begin{aligned}\dot{\delta x}_1 &= (\bar{x}_2 + 2)\bar{u}\delta x_1 + (1 + \bar{x}_1\bar{u})\delta x_2 + 2\bar{x}_3\delta x_3 + \bar{x}_1(\bar{x}_2 + 2)\delta u \\ \dot{\delta x}_2 &= \delta x_1 + 4\bar{x}_2\delta x_2 + \delta u \\ \dot{\delta x}_3 &= \bar{u}\delta x_1 + \bar{x}_3\delta x_2 + \bar{x}_2\delta x_3 + \bar{x}_1\delta u \\ \delta y &= \bar{u}\delta x_1 + \delta x_2 + \bar{x}_1\delta u\end{aligned}$$

Nel punto di equilibrio $\bar{u} = 0$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0$ si ha

$$\begin{aligned}\dot{\delta x}_1 &= \delta x_2 \\ \dot{\delta x}_2 &= \delta x_1 + \delta u \\ \dot{\delta x}_3 &= 0 \\ \delta y &= \delta x_2\end{aligned}$$

La matrice dinamica di tale sistema è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed ha un autovalore nel semipiano destro. L'equilibrio considerato è quindi instabile.

Esercizio 4

4.1

La funzione di trasferimento richiesta ha la seguente espressione

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{F(s)A(s)(B(s) + D(s))}{1 + A(s)[C(s) + E(s)(B(s) + D(s))]}$$

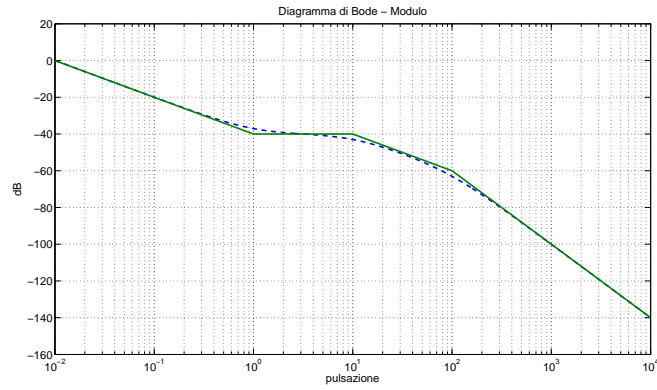


Figura 1: Diagramma di Bode del modulo di $G(s)$.

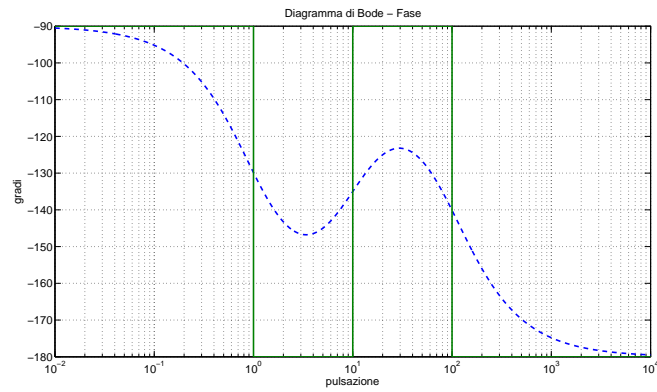


Figura 2: Diagramma di Bode della fase di $G(s)$.

4.2

È necessario che $F(s)$, che si trova in serie a tutto il resto dello schema, sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema nel suo complesso.

4.3

I diagrammi di Bode richiesti sono mostrati in Figura 1 e 2.