Fondamenti di Automatica

Prof. Bascetta

27 Gennaio 2020

SOLUZIONE

Fondamenti di Automatica
Proff. Luca Bascetta, Paolo Rocco e Gian Paolo Incremona

Terzo appello
27 Gennaio 2020

ESERCIZIO 1

1. Si consideri un sistema lineare tempo invariante Σ descritto dalle matrici (A, B, C, D) e dal vettore di stato $\mathbf{x}(t)$, e un cambiamento di variabili di stato rappresentato dalla trasformazione $\hat{\mathbf{x}}(t) = T\mathbf{x}(t)$. Si determinino le matrici $\left(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}\right)$ del sistema $\hat{\Sigma}$ ottenuto applicando tale trasformazione.

   Le matrici di Σ' sono definite come segue

   $$A' = TAT^{-1} \quad B' = TB \quad C' = CT^{-1} \quad D' = D$$

2. Si mostri che la proprietà di stabilità è invariante rispetto alla trasformazione $\hat{\mathbf{x}}(t) = T\mathbf{x}(t)$ (ovvero se Σ è rispettivamente stabile, instabile, asintoticamente stabile allora $\hat{\Sigma}$ sarà stabile, instabile, asintoticamente stabile).

   Poiché la stabilità di un sistema lineare tempo invariante dipende dagli autovalori della matrice A, A e A' sono matrici simili e matrici simili hanno gli stessi autovalori, si può concludere che la stabilità è invariante rispetto alla trasformazione di matrice T.

3. Si mostri che i sistemi Σ e $\hat{\Sigma}$ sono rappresentati dalla medesima funzione di trasferimento.

4. Si spieghi cosa si intende per proprietà strutturale di un sistema dinamico, e si citino almeno due esempi di proprietà strutturali.

ESERCIZIO 2

1. Si enunci il criterio di Nyquist.

2. Si valuti, utilizzando il criterio di Bode o il criterio di Nyquist, se il sistema in anello chiuso ottenuto a partire dalle seguenti funzioni di trasferimento d'anello è asintoticamente stabile

$$L_1(s) = \frac{0.5}{s+10} \qquad L_2(s) = 10\frac{1-s}{(1+s)^2} \qquad L_3(s) = \frac{10}{1-s}$$

   L_1, non è possibile utilizzare il criterio di Bode poiché la pulsazione critica non è definita. Dal criterio di Nyquist, essendo la risposta in frequenza sempre a modulo minore di 1, si ricava che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.
   L_2, è possibile utilizzare il criterio di Bode. Si verifica facilmente che la pulsazione critica è 10 rad/s. Sebbene il diagramma tagli l'asse a pendenza -1, a causa dello zero nel semipiano destro, il margine di fase è pari a -72.8 gradi. Il sistema in anello chiuso non è quindi asintoticamente stabile.
   L_3, non è possibile applicare il criterio di Bode poiché è presente un polo nel semipiano destro. È immediato verificare dal diagramma di Nyquist che $N = 0$, mentre $P_d = 1$. Il sistema in anello chiuso non è quindi asintoticamente stabile.

3. Si spieghi se il sistema in anello chiuso ottenuto a partire dalla funzione di trasferimento d'anello $L(s) = G_1(s)G_2(s)$, dove

$$G_1(s) = 10\frac{1-s}{1+s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{1-s}$$

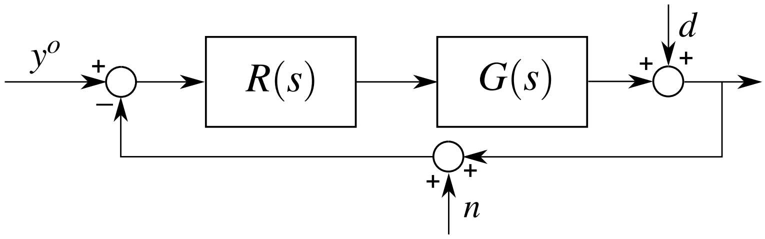
   è asintoticamente stabile.

   Poiché nella formazione di $L(s)$ è presente una cancellazione tra due singolarità nel semipiano destro, il sistema in anello chiuso non può essere asintoticamente stabile.

4. Si determini il valore del margine di fase per la funzione di trasferimento d'anello $L_1(s)$ definita al punto 2.

   Poiché il diagramma di Nyquist di L_1 è sempre interno alla circonferenza unitaria, il margine di fase è infinito.

ESERCIZIO 3
Si consideri il sistema di controllo schematizzato in figura



dove

$$G(s) = \frac{10(10 - s)}{(s + 1)(s + 10)}$$

1. Assumendo $n = 0$ e $d = 0$, si determini la funzione di trasferimento del regolatore $R(s)$ in modo tale che:

   - l'errore a transitorio esaurito in risposta a un segnale di riferimento a scalino sia nullo;
   - il margine di fase sia almeno di 60^o;
   - la pulsazione critica sia almeno di 1 rad/s.

   Il regolatore che soddisfa le specifiche é

   $$R(s) = \frac{0.1(s + 1)}{s}$$

   Il margine di fase é 72.7^o e la pulsazione critica 1.02 rad/s. La funzione d'anello risulta

   $$L(s) = \frac{\left(1 - \frac{s}{5}\right)}{s(s0.1 + 1)}$$

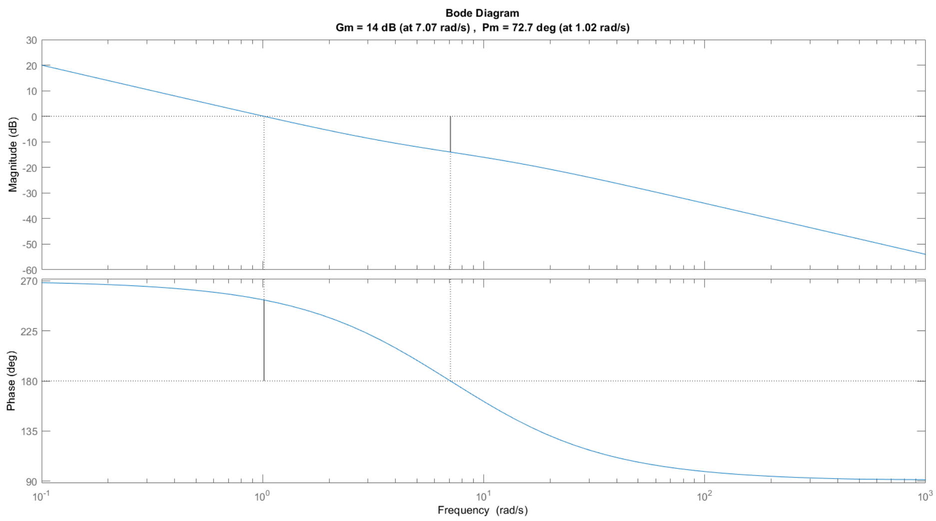


Figura 1: Diagramma di Bode di $L(s)$.

2. Con il controllore progettato al punto precedente, si valuti di quanto vengono attenuati sull'uscita i seguenti disturbi: $d = \sin(0.1t)$ e $n = \sin(100t)$.

   In presenza dei disturbi $n = \sin(0.05t)$ e $d = \sin(50t)$, l'errore a transitorio esaurito é

$$\left|e_\infty\right| \simeq \left|\frac{1}{L(j0.05)}\right| + \left|L(j50)\right| = 0.05 + 0.0016 = 0.0516$$

3. Si assuma ora la presenza nell'anello di un ritardo di 0.1 s. Si scriva la nuova espressione di $G(s)$ in presenza di ritardo e si calcoli la corrispondente riduzione di margine di fase del sistema in anello chiuso progettato al punto precedente.

   In presenza del ritardo, la nuova espressione di $G(s)$ sarebbe

$$G(s) = \frac{20(5-s)e^{-0.1s}}{(s+1)(s+10)}$$

   La riduzione di margine di fase sarebbe invece di

$$0.1\omega_c \frac{180}{\pi} = 5.84^{\text{o}}$$

ESERCIZIO 4

1. Si enunci il teorema di Shannon (o del campionamento). xxx

2. Si consideri un campionatore con pulsazione di campionamento pari a 50 rad/s. Si valuti, motivando la risposta, se è possibile campionare senza aliasing il seguente segnale:

   $$y(t) = 10 \sin(5t) + 0.1 \cos(30t) + 5 \sin(20t)$$

   A causa dell'armonica a 30 rad/s, essendo $\Omega_N = 25$ rad/s, non è possibile campionare il segnale senza avere aliasing.

3. Se nel precedente segnale sono presenti armoniche che generano aliasing, per ciascuna di esse si determini la pulsazione dell'armonica di aliasing che si manifesta. Si determini quindi il piú elevato tempo di campionamento che permette di campionare $y(t)$ senza aliasing.

   L'armonica a 30 rad/s genera un'armonica di aliasing a $\omega_{al} = \Omega_s - 30$ rad/s $= 20$ rad/s.

4. Si consideri un sistema in anello chiuso in cui il controllore digitale è preceduto da un campionatore. Si spieghi, in modo chiaro, quali sono i criteri per la scelta della pulsazione di campionamento.