Seconda prova scritta intermedia 2008/2009
Soluzione

Bascetta

Esercizio 1

1.1

Il polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso ha la seguente espressione

$$\varphi(s) = s^2 + 10.1s + 1$$

Trattandosi di un polinomio di secondo grado in cui tutti i coefficienti sono concordi positivi, per la condizione necessaria (in questo caso anche sufficiente) il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

1.2

La funzione di trasferimento dal disturbo $d(t)$ all'errore $e(t)$ è

$$-S(s) = -\frac{1}{1+L(s)} = -\frac{(1+s)^2}{(1+0.1s)(1+10s)}$$

Poiché il sistema è asintoticamente stabile si può applicare il teorema della risposta in frequenza e l'espressione dell'errore a transitorio esaurito è

$$e(t) = -\frac{|1+j\omega|^2}{|1+j0.1\omega||1+j10\omega|} \sin\left(\omega t + 2\angle 1 + j\omega - \angle 1 + j0.1\omega - \angle 1 + j10\omega\right)$$

1.3

Dall'analisi di $|S(j\omega)|$ o più semplicemente dal suo diagramma di Bode del modulo si ricava immediatamente che tale funzione ha un minimo alla pulsazione $1\, rad/s$. In corrispondenza di tale pulsazione si ha quindi la minima ampiezza di $e(t)$.

Esercizio 2

2.1

Per ottenere errore finito a transitorio esaurito in risposta ad una variazione a scalino del riferimento è sufficiente una funzione di trasferimento d'anello di tipo 0. Il guadagno del regolatore dovrà invece soddisfare il vincolo

$$\frac{1}{1+\mu_R} \leq 0.15$$

ovvero $\mu_R \geq 5.67$. Potremo quindi scegliere la parte statica del regolatore nel modo seguente

$$R_1(s) = 10$$

Per garantire l'attenuazione del disturbo $n(t)$ sull'uscita dovremo invece porre

$$\left|\frac{L(j\bar{\omega})}{1+L(j\bar{\omega})}\right| \leq \frac{1}{10000} \quad \bar{\omega} \geq 100\, rad/s$$

Dalle specifiche risulta che il disturbo $n(t)$ agisce a pulsazioni decisamente superiori alla pulsazione critica. Potremo quindi semplificare il vincolo precedente come segue

$$|L(j\bar{\omega})| \leq \frac{1}{10000} \quad \bar{\omega} \geq 100\, rad/s$$

ovvero

$$|L(j\bar{\omega})|_{dB} \leq -80\, dB \quad \bar{\omega} \geq 100\, rad/s$$

Il progetto dinamico si può condurre a termine in vari modi. Una possibile soluzione è

$$R_2(s) = \frac{1+100s}{(1+0.1s)^2}$$

con cui si ricava la funzione di trasferimento d'anello (si veda il diagramma di Bode del modulo e della fase in Fig. 1)

$$L(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+0.1s)^2}$$

Tale funzione di trasferimento d'anello dà origine ad una pulsazione critica di circa $1\, rad/s$ ed un margine di fase di $84.5°$, che soddisfano le specifiche. Anche il vincolo sulla reiezione del disturbo sinusoidale in retroazione è soddisfatto. Risulta infine

$$R(s) = 10\frac{1+100s}{(1+0.1s)^2}$$

2.2

Dal diagramma di Bode della fase di $L(s)$ si ricava $\omega_\pi = 10.1\, rad/s$. Conseguentemente il margine di guadagno vale

$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = 20.4$$

Se, infine, fosse presente un ritardo τ nell'anello si avrebbe

$$\varphi_m = 84.5° - \tau\frac{180°}{\pi}$$

Il massimo valore di τ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile è quindi $1.475\, s$.

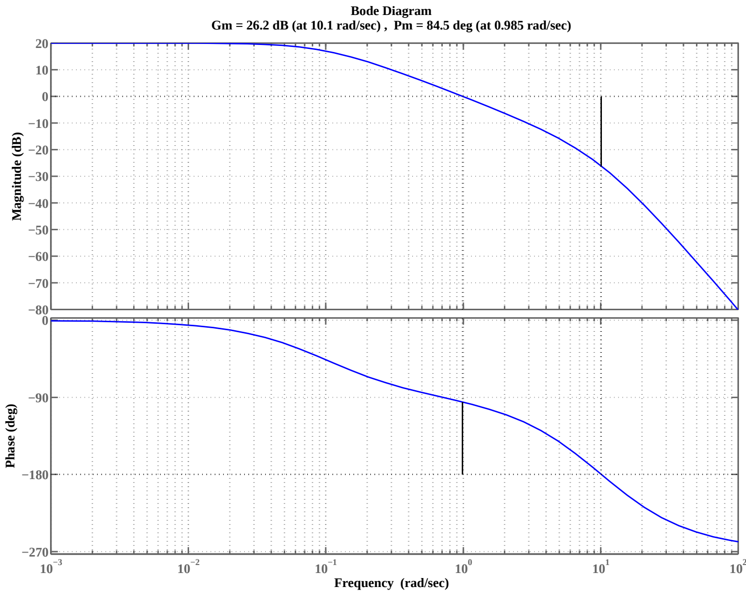

Figura 1: Diagramma di Bode del modulo e della fase di $L(s)$.

2.3

Il metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso non è applicabile poichè $G(s)$ ha margine di guadagno infinito.

Esercizio 3

3.1

I luoghi delle radici diretto e inverso di $L(s)$ sono rappresentati rispettivamente in Fig. 2 e 3.
Il luogo diretto presenta due asintoti che intersecano l'asse reale in

$$x_a = \frac{-4-(1+2+3)}{2} = -5$$

e sono caratterizzati da angoli di $90°$ e $270°$.
Il luogo inverso presenta due asintoti caratterizzati da angoli di $0°$ e $180°$.

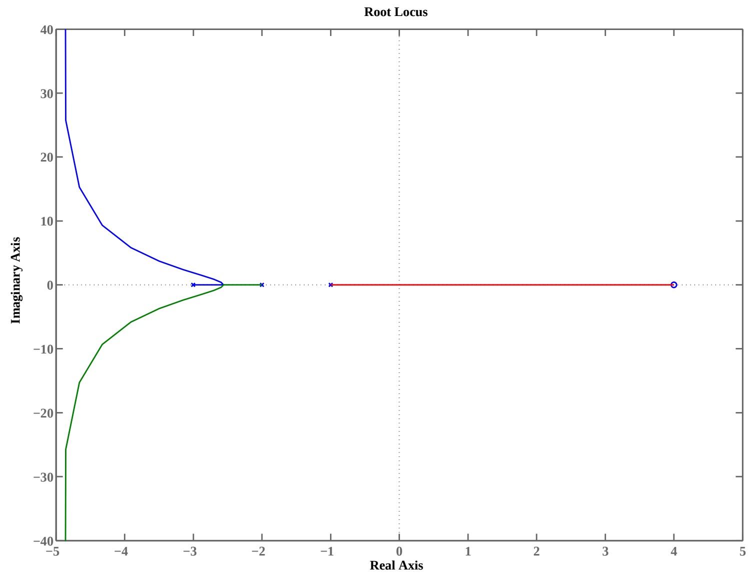

Figura 2: Luogo delle radici diretto di $L(s)$.

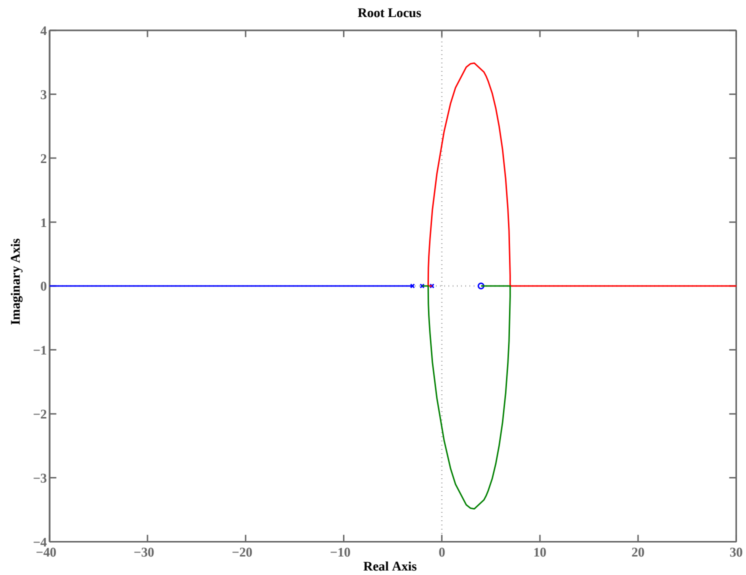

Figura 3: Luogo delle radici inverso di $L(s)$.

3.2

Nel luogo diretto la radice in -1 per $\rho > \rho_M$ può assumere parte reale positiva. Dalla punteggiatura in $\bar{s} = 0$ si ricava

$$\rho_M = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 1.5$$

Nel luogo inverso le due radici inizialmente in -1 e -2, dopo essere diventate complesse e coniugate, per $\rho < \rho_m$ possono assumere parte reale positiva.
Poiché la differenza tra poli e zeri di $L(s)$ è pari a 2, la somma delle parti reali dei poli (pari a -6) si deve conservare. Quando allora le due radici complesse e coniugate si trovano sull'asse immaginario, la terza radice si trova in -6.
Calcolando la puntaggiatura in $\bar{s} = -6$ si ricava

$$|\rho_m| = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{10} = 6$$

Il sistema in anello chiuso è quindi asintoticamente stabile per $-6 < \rho < 1.5$.

3.3

Poiché la differenza tra poli e zeri di $L(s)$ è pari a 2, la somma delle parti reali dei poli (pari a -6) si deve conservare.
Quando $\rho \to \infty$ due singolarità vanno all'infinito lungo gli asintoti, avendo entrambe parte reale pari a -5, l'altra va nello zero con parte reale pari a 4.
La somma delle parti reali sarà quindi -5-5+4=-6.

Esercizio 4

4.1

La trasformata Zeta dell'uscita del sistema ha la seguente espressione

$$Y(z) = \frac{R(z)G(z)}{1 + R(z)G(z)} \frac{z}{z-1} = \frac{0.75z}{z^3 - z^2 - 0.25z + 0.25}$$

Eseguendo i primi due passi di lunga divisione si ricava

$$Y(z) = 0.75z^{-2} + 0.75z^{-3} + \ldots$$

I primi quattro campioni dell'uscita del sistema saranno quindi

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 0 \quad y(2) = 0.75 \quad y(3) = 0.75$$

4.3

Il polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso ha la seguente espressione

$$\varphi(z) = z^2 - 0.25$$

Applicando la trasformazione bilineare si ottiene

$$\varphi\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 - 0.25 = \frac{0.75s^2 + 2.5s + 0.75}{(1-s)^2}$$

Poiché il polinomio a numeratore è di secondo grado la condizione necessaria (in questo caso anche suffficiente) permette di concludere che le radici del polinomio in s avranno parte reale negativa e, conseguentemente, quelle del polinomio in z saranno interne al cerchio unitario centrato nell'origine. Si conclude quindi che il sistema a tempo discreto è asintoticamente stabile.

4.3

y_∞ esiste poiché il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, e si può calcolare con il teorema del valor finale poichè i poli di $L(z)$ sono interni al cerchio di raggio unitario centrato nell'origine e nel punto $z = 1$. Si ha quindi

$$y_\infty = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{0.75}{z^2 - 0.25} \frac{z}{z-1} = 1$$