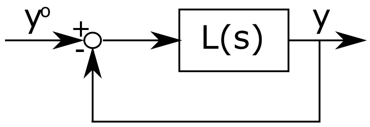
Fondamenti di Automatica
Prof. Luca Bascetta

Soluzioni della seconda prova scritta intermedia
25 giugno 2018

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema di controllo di figura, con y variabile controllata e y^o riferimento:



in cui:

$$L(s) = R(s)G(s), \qquad R(s) = \frac{\rho}{(1+s)} \quad G(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$$

1. Si tracci il luogo delle radici al variare di $\rho > 0$.

   La funzione di trasferimento $L(s)$ può essere riscritta, ai fini del tracciamento del luogo delle radici, nella seguente forma:

   $$L(s) = \frac{\rho}{(s+1)^3}$$

   La funzione di trasferimento non ha zeri e presenta 3 poli coincidenti ($m = 0, n = 3$), con $p_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. Sia il luogo diretto, sia quello inverso, sono quindi caratterizzati da 3 asintoti, che si incontrano nel punto dell'asse reale di ascissa:

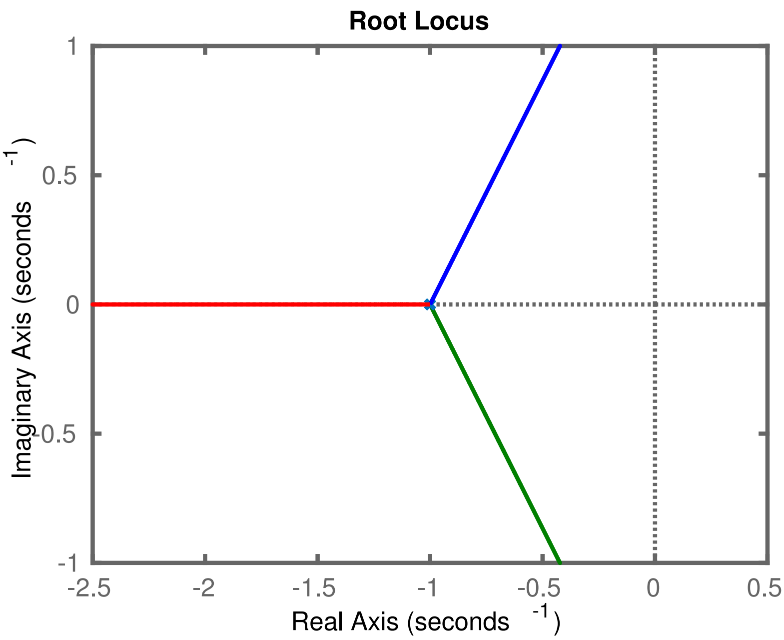
   $$x_a = \frac{\sum_i z_i - \sum_i p_i}{n - m} = \frac{-(1+1+1)}{3} = -1$$

   Nel luogo diretto, gli asintoti formano con l'asse reale orientato positivamente i seguenti angoli:

   $$\vartheta_{ah} = \frac{180^\circ + h\,360^\circ}{n - m} = 60^\circ + h\,120^\circ$$

   ovvero, con $h = 0, 1, 2$, gli angoli 60°, 180°, 300°.

   Tenendo conto della regola di appartenenza dei punti dell'asse reale al luogo, il luogo diretto si traccia come in figura:

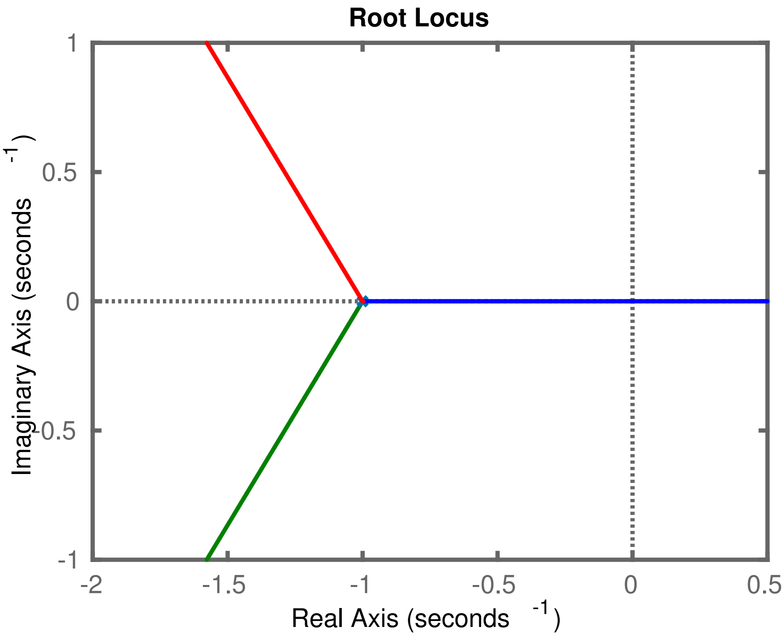


2. Si tracci il luogo delle radici al variare di $\rho < 0$.

   Nel luogo inverso, gli asintoti formano con l'asse reale orientato positivamente i seguenti angoli:

$$\vartheta_{ah} = \frac{h\ 360°}{n-m} = h\ 120°$$

   ovvero, con $h = 0, 1, 2$, gli angoli 120°, 240°, 360°. Il luogo inverso si traccia come in figura:



3. Si determinino con il luogo delle radici i valori di ρ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

   Nel luogo diretto un polo si muove sull'asse reale, rimanendo nel semipiano sinistro per qualunque valore di $\rho > 0$, gli altri due poli, invece, sono complessi e coniugati e si muovono verso il semipiano destro. È possibile determinare il valore di ρ, $\bar{\rho}_M$, per cui tali poli si trovano sull'asse immaginario sfruttando la regola del baricentro.
   Dalla configurazione dei poli di $L(s)$ si ricava che il baricentro vale -3. Quando due dei tre poli hanno parte reale nulla, quindi, il terzo sarà in -3. Dalla regola della punteggiatura ($\bar{s} = -3$) si ricava

$$|\bar{\rho}_M| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\rho}_M = 8$$

   Nel luogo inverso, invece, due poli, complessi e coniugati, rimangono nel semipiano sinistro per qualunque valore di $\rho < 0$; il terzo polo, reale, si muove verso il semipiano destro. È quindi possibile determinare il valore di ρ, $\bar{\rho}_m$, per cui tale polo si trova sull'asse immaginario punteggiando in $\bar{s} = 0$. Dalla regola della punteggiatura ($\bar{s} = 0$) si ricava

$$|\bar{\rho}_m| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\rho}_m = -1$$

   In conclusione, il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile per

$$-1 < \rho < 8$$

4. Si spieghi se, quando uno o più dei poli in anello chiuso hanno parte reale -2, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

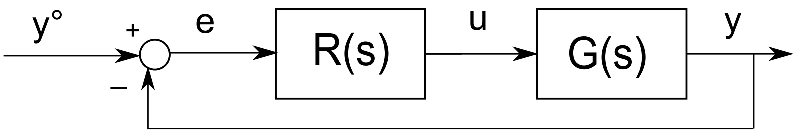
   Il sistema in anello chiuso può presentare poli a parte reale -2 in due casi.

Nel luogo diretto, un polo può essere reale di valore -2 e in tal caso, poiché la somma delle parti reali dei poli in anello chiuso vale -3 per qualunque valore di ρ, gli altri due poli saranno complessi e coniugati con parte reale -0.5: il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Nel luogo inverso, due poli possono essere complessi e coniugati con parte reale -2 e in tal caso, sempre perché la somma delle parti reali dei poli in anello chiuso vale -3, il terzo polo sarà reale nel punto $+1$: il sistema in anello chiuso è instabile

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente sistema di controllo:



dove

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+10s)^2}$$

1. Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

   - con un riferimento $y^\circ(t) = 10sca(t)$ l'errore $e(t) = y^\circ(t) - y(t)$ soddisfi la limitazione, a transitorio esaurito, $|e_\infty| < 0.15$;
   - il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale di 65°;
   - la pulsazione critica ω_c sia approssimativamente massimizzata.

   Essendo richiesto un errore a transitorio esaurito finito ma non necessariamente nullo, è sufficiente che la funzione di trasferimento d'anello abbia tipo g_L nullo, e quindi che anche il tipo della funzione di trasferimento del regolatore, g_R, sia nullo.

   In questo caso, l'errore vale:

$$|e_\infty| = \frac{10}{1+\mu_R} \leq 0.15$$

   Per soddisfare la specifica dovremo quindi scegliere

$$\mu_R \geq \frac{10}{0.15} - 1 = 65.6$$

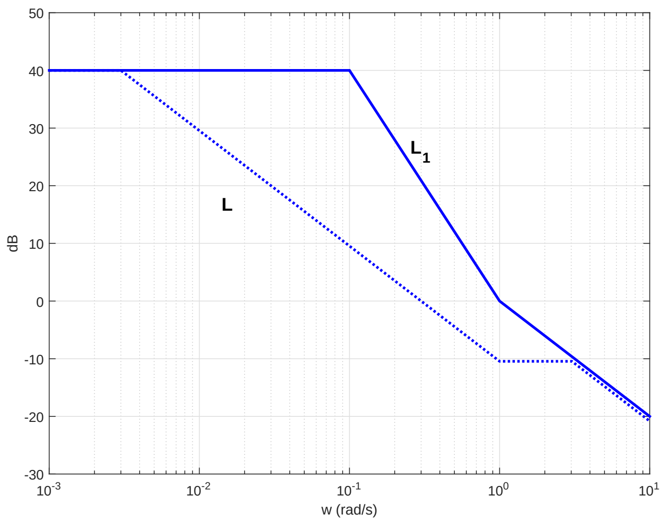
   È opportuno scegliere $\mu_R = 100$ per cui il progetto statico si conclude con

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}} = 100$$

   Per il progetto dinamico, consideriamo la funzione di trasferimento:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = 100\frac{1-s}{(1+10s)^2}$$

   Tracciandone il diagramma di Bode del modulo, ci si rende subito conto, per la presenza dello zero nel semipiano destro alla pulsazione 1, che il margine di fase è negativo o del tutto insufficiente. Si sceglie allora di tagliare alla pulsazione 0.3 con pendenza -1, raccordando il diagramma di $|L|$ a quello di $|L_1|$ in bassa frequenza, mantenendo lo zero alla pulsazione 1, e raccordando il diagramma di $|L|$ con quello di $|L_1|$ alla pulsazione 3:



Si ottiene quindi $\omega_c = 0.3$ e, per quanto riguarda fase critica e margine di fase:

$$\varphi_c = -\arctan(\frac{0.3}{0.003}) - \arctan(\frac{0.3}{1}) - \arctan(\frac{0.3}{3}) = -89° - 17° - 6° = -112°$$
$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 68°$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte e risulta:

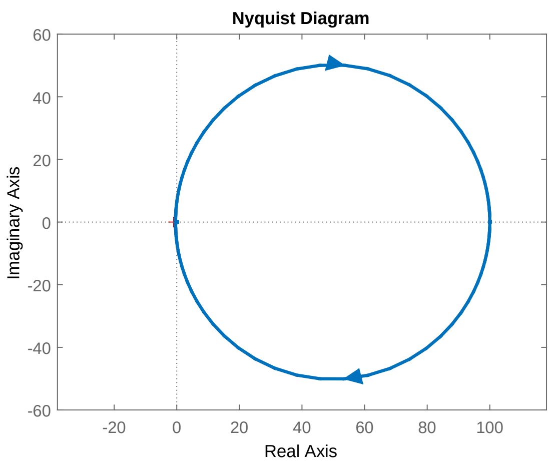
$$L(s) = 100 \frac{1-s}{(1+s/0.003)\,(1+s/3)}$$

L'espressione della funzione di trasferimento del controllore è quindi:

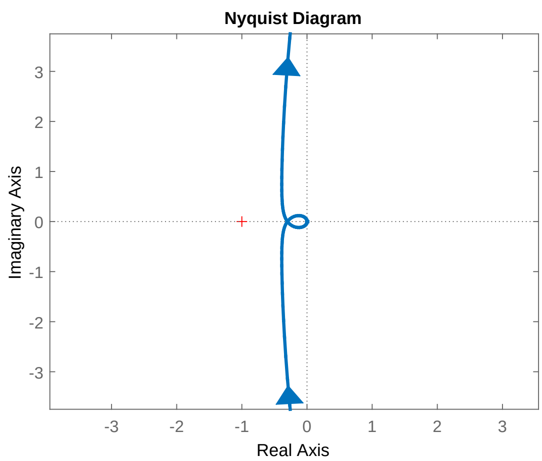
$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)} = 100\frac{(1+10s)^2}{(1+333s)\,(1+0.33s)}$$

2. Si tracci il diagramma di Nyquist qualitativo associato alla funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ determinata al punto precedente, avendo cura di riportare nel disegno la posizione del punto -1.

Il modulo della risposta in frequenza $L(j\omega)$ parte dal valore 100 e diminuisce monotonicamente, mentre la fase parte dal valore 0 e tende asintoticamente al valore $-270°$. Con queste informazioni si può tracciare il diagramma polare associato a L e quindi il diagramma di Nyquist:



Dettaglio:



Poiché sappiamo dal criterio di Bode che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, per il criterio di Nyquist il diagramma di Nyquist non potrà compiere giri intorno al punto -1, ovvero si troverà tutto alla destra di tale punto.

3. Senza eseguire i relativi conti, si scrivano le formule necessarie al calcolo del margine di guadagno specificatamente applicate al sistema di controllo del presente esercizio.

   Occorre dapprima determinare la pulsazione ω_π alla quale la fase della risposta in frequenza $L(j\omega)$ vale $-180°$:

   $$\arg L(\omega_\pi) = -\arctan(\omega_\pi) - \arctan(333\omega_\pi) - \arctan(0.33\omega_\pi) = -180°$$

   A questo punto si valuta il modulo di $L(j\omega)$ alla pulsazione ω_π:

   $$|L(\omega_\pi)| = 100\frac{\sqrt{1+\omega_\pi^2}}{\sqrt{1+(333\omega_\pi)^2}\sqrt{1+(0.33\omega_\pi)^2}}$$

   Il margine di guadagno è l'inverso del modulo così calcolato:

   $$k_m = \frac{1}{|L(\omega_\pi)|}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri un controllore digitale, con funzione di trasferimento $R(z)$, descritto in termini del legame tra il suo ingresso (l'errore discreto $e^*(k)$) e la sua uscita (la variabile di controllo discreta $u^*(k)$) da:

$$u^*(k) = 0.5u^*(k-1) + 0.1e^*(k-1)$$

1. Si determini la funzione di trasferimento, $R(z)$, del controllore digitale.

   Il legame tra l'errore e la variabile di controllo è assegnato mediante un'equazione alle differenze.

   Si può quindi procedere applicando la Trasformata Zeta al primo e al secondo membro

   $$U^*(z)(1-0.5z^{-1}) = 0.1E^*(z)z^{-1}$$

   La funzione di trasferimento del controllore digitale sarà pertanto

   $$R(z) = \frac{U^*(z)}{E^*(z)} = \frac{0.1}{z-0.5}$$

2. Si verifichi se il controllore digitale del punto precedente può derivare dalla discretizzazione, mediante il metodo di Tustin, del controllore analogico

   $$R^\circ(s) = 0.2\frac{1-0.25s}{1+0.75s}$$

   In caso affermativo si determini anche il periodo campionamento T compatibile con tale discretizzazione.

   Metodo di Tustin

   $$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

   Discretizzando il controllore $R^\circ(s)$ con il Metodo di Tustin si ha

   $$R(z) = R^\circ\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right) = 0.2\frac{(T-0.5)z+T+0.5}{(T+1.5)z+T-1.5}$$

   Evidentemente, se si pone il periodo di campionamento $T = 0.5$ ne segue che

   $$R(z) = R^\circ\left(4\frac{z-1}{z+1}\right) = 0.1\frac{1}{z-0.5}$$

   che coincide con il controllore digitale assegnato.

3. Supponendo che l'errore sia $e^*(k) = (0.2)^k, \quad k \geq 0$, si trovi l'andamento analitico della variabile di controllo discreta $u^*(k)$, utilizzando il metodo di antitrasformazione di Heaviside.

   La Trasformata Zeta dell'errore è

   $$E^*(z) = \frac{z}{z-0.2}$$

e quindi la Trasformata Zeta della variabile di controllo risulta essere

$$U^*(z) = R(z)E^*(z) = \frac{0.1z}{(z-0.5)(z-0.2)}$$

Il metodo di Heaviside applicato a $U^*(z)/z$ porta alla scomposizione nelle due frazioni semplici

$$\frac{U^*(z)}{z} = \frac{1}{3}\frac{1}{z-0.5} - \frac{1}{3}\frac{1}{z-0.2}$$

Da questa espressione, moltiplicando a sinistra e a destra per z, si ricava la Trasformata Zeta $U^*(z)$ e quindi la variabile di controllo discreta in funzione del tempo k

$$u^*(k) = \frac{1}{3}(0.5)^k - \frac{1}{3}(0.2)^k, \quad k \geq 0$$