Seconda prova scritta intermedia 2006/2007
Soluzione

Bascetta

Esercizio 1

1.1

Il sistema può essere scomposto in un anello a retroazione unitaria negativa contenente la funzione di trasferimento $G_1(s)$ ed una cascata tra $G_2(s)$ ed il medesimo anello. La funzione di trasferimento è quindi

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_1(s)}$$

1.2

Come detto precedentemente possiamo scomporre $G(s)$ in

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} + G_2(s)\frac{1}{1 + G_1(s)}$$

Essa può quindi essere interpretata come il parallelo tra due sistemi, il primo con funzione di trasferimento

$$G_a(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}$$

ed il secondo con funzione di trasferimento

$$G_b(s) = G_2(s)\frac{1}{1 + G_1(s)}$$

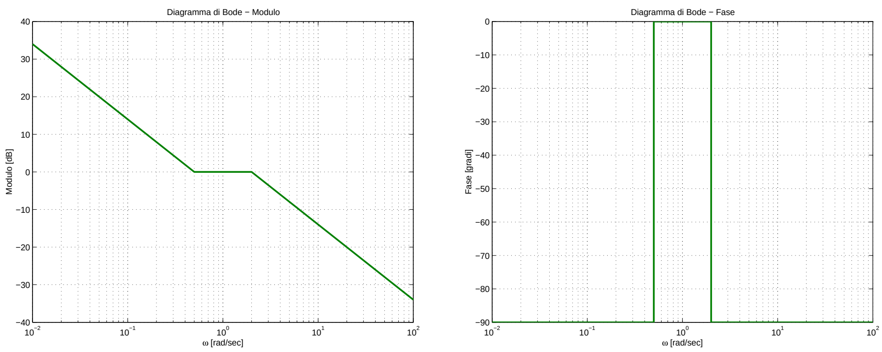
Sappiamo che $G(s)$ sarà asintoticamente stabile se lo saranno $G_a(s)$ e $G_b(s)$. Inoltre, nel caso di $G_a(s)$ abbiamo a che fare con un sistema retroazionato, quindi eventuali conoscenze circa la stabilità di $G_1(s)$ non servono a concludere nulla circa la stabilità di $G_a(s)$. Nel caso di $G_b(s)$, invece, abbiamo a che fare con la serie di due sistemi: $G_b(s)$ sarà asintoticamente stabile se lo sono i sottosistemi che compongono la serie.

Per quanto detto, si conclude che condizione necessaria (ma non sufficiente) per l'asintotica stabilità del sistema complessivo è che $G_2(s)$ sia asintoticamente stabile.

1.3

Si ricava

$$G(s) = \frac{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{2}\frac{1+2s}{s(1+0.5s)}$$



1.4

Le istruzioni MATLAB richieste sono

```
G=tf([2 1],[1 2 0]);
bode(G)
```

Esercizio 2

2.1

Se ω_c è la pulsazione critica del sistema ad anello chiuso, un ritardo di τ secondi comporta un decremento di fase pari a

$$-\omega_c \tau \frac{180°}{\pi}$$

influendo quindi sulla stabilità del sistema ad anello chiuso. Con le ipotesi fatte si avrà quindi

$$\varphi_c = -\varphi_c' - \omega_c \tau \frac{180°}{\pi}, \quad \varphi_m = 180° - \varphi_c' - \omega_c \tau \frac{180°}{\pi}$$

Il massimo ritardo ammissibile, tale da garantire un margine di fase maggiore o uguale a $\bar{\varphi}_m$, sarà

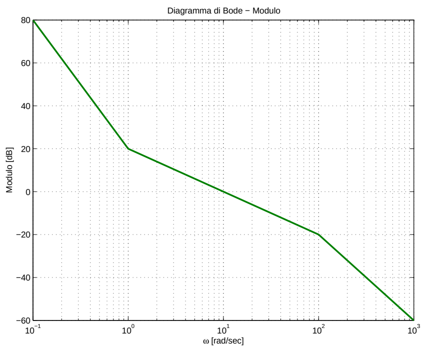
$$\tau \le \frac{\pi}{\omega_c}\left(1 - \frac{\varphi_c' + \bar{\varphi}_m}{180°}\right)$$

2.2

Dal diagramma di Bode riportato in figura si ricava $\omega_c \approx 10\,rad/s$. La fase critica ed il margine di fase saranno quindi pari a

$$\varphi_c = -270^\circ + 2\arctan(10) - \arctan(0.1) \approx -107^\circ, \quad \varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| \approx 73^\circ > 0$$

Si conclude quindi che il sistema ad anello chiuso con $\tau = 0$ è asintoticamente



stabile. Dalla formula precedente si può poi ricavare che il massimo ritardo ammissibile dal sistema è pari a

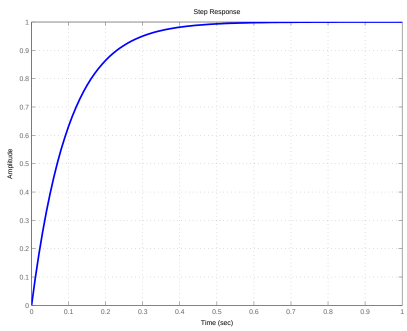
$$\tau < \frac{\pi}{180^\circ}\frac{\varphi_m}{10} \approx 0.13\,s$$

2.3

Poiché il margine di fase del sistema ad anello chiuso è elevato possiamo approssimare tale sistema come un filtro passa-basso del primo ordine, con un polo dominante reale a pulsazione pari alla pulsazione critica, ovvero

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = F(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_c} = \frac{1}{1 + 0.1s}$$

La risposta a scalino unitario sarà quindi esponenziale con costante di tempo



dominante di 0.1 secondi.

Esercizio 3

3.1

Per ottenere errore finito a transitorio esaurito in risposta ad una variazione a scalino del riferimento è sufficiente una funzione di trasferimento d'anello di tipo 0. Il guadagno del regolatore deve garantire la specifica sulla limitazione dell'errore a transitorio esaurito soddisfacendo la seguente disuguaglianza

$$\frac{10}{1+10\mu_R} \leq 0.1 \quad \Rightarrow \quad \mu_R \geq 9.9$$

Scegliamo pertanto $g_R = 0$ e $\mu_R = 10$, ovvero

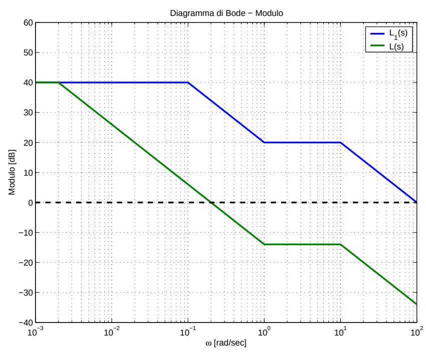
$$R_1(s) = 10$$

Per il progetto dinamico consideriamo la funzione di trasferimento

$$L_1(s) = \frac{100(1-s)}{(1+10s)(1+0.1s)}$$

Si può facilmente immaginare che, a causa dello zero a fase non minima, essendo $\omega_c \approx 100\, rad/s$ il margine di fase non sia adeguato o, addirittura, sia negativo (si ha infatti $\varphi_m \approx -84° < 0$).

Si sceglie allora di tagliare alla pulsazione $0.2\, rad/s$ con pendenza -1, mantenendo paralleli il diagramma di $|L(j\omega)|$ e quello di $|L_1(j\omega)|$ in alta frequenza, mantenendo lo zero alla pulsazione $1\, rad/s$ (che non può essere cancellato) ed il polo a pulsazione $10\, rad/s$. Poiché in fase di progetto statico si sono imposti vincoli sia sul tipo che sul guadagno di $R(s)$ è opportuno raccordare, in bassa frequenza, il diagramma di $|L(j\omega)|$ e quello di $|L_1(j\omega)|$, introducendo un polo alla pulsazione $0.002\, rad/s$.



Si ottiene

$$\varphi_c = -\arctan(0.2) - \arctan(500 \cdot 0.2) - \arctan(0.1 \cdot 0.2) \approx -102°$$
$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| \approx 78°$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte. Risulta

$$L(s) = \frac{100(1-s)}{(1+500s)(1+0.1s)}$$

da cui

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 10\frac{L(s)}{L_1(s)} = 10\frac{1+10s}{1+500s}$$

3.2

Poiché la seconda armonica del riferimento, a pulsazione $10\,rad/s$, è decisamente fuori dalla banda passante del sistema di controllo (che arriva a $0.2\,rad/s$), il segnale di riferimento dato non può essere inseguito correttamente.

3.3

Il disturbo può essere espresso anche come

$$d(t) = \mathrm{sca}(t) + 5\mathrm{ram}(t)$$

Poiché la funzione di trasferimento dal disturbo all'errore ha tipo 0 si deduce immediatamente che lo scalino produrrà un errore finito non nullo mentre la rampa un errore infinito. Infatti

$$e_{d_\infty} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} -s\frac{G(s)}{1+L(s)}\left(\frac{1}{s}+\frac{5}{s^2}\right) = \lim_{s\to 0} -\frac{10}{1+100}\frac{s+5}{s} = -\infty$$