Fondamenti di Automatica

Prof. Bascetta

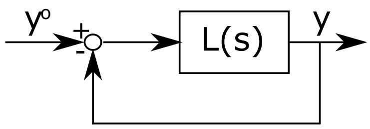
22 Giugno 2021

SOLUZIONE

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
PROFF. LUCA BASCETTA, PAOLO ROCCO E GIAN PAOLO INCREMONA

SECONDA PROVA INTERMEDIA
22 GIUGNO 2021

ESERCIZIO 1
Si consideri il sistema di controllo di figura, con y variabile controllata e y^o riferimento



in cui $\quad L(s) = \rho \dfrac{s-1}{(s+1)^2(s-5)}$.

1. Si tracci il luogo delle radici diretto.

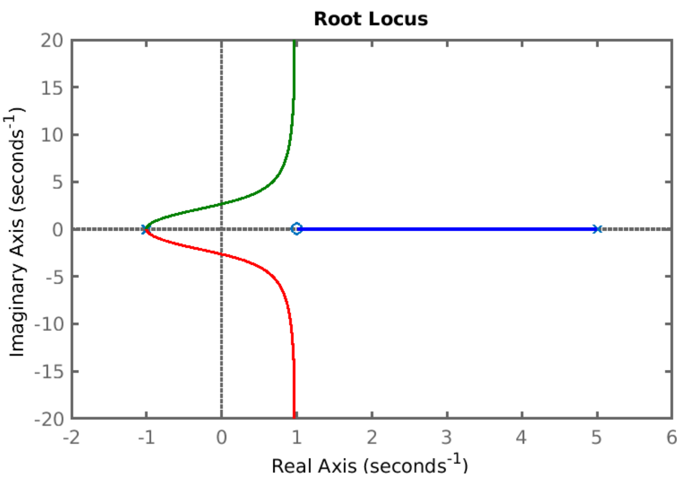
   Il luogo delle radici diretto è costituito da 3 rami, uno dei quali termina in uno zero, mentre gli altri due terminano all'infinito tramite un asintoto.
   Tale asintoto interseca l'asse reale nel punto

$$x_a = \frac{-1-(1+1-5)}{2} = 1$$

   e forma con l'asse reale gli angoli

$$\theta_a = 90^\circ + h180^\circ = 90^\circ, 270^\circ \qquad h = 1, 2$$

   Il luogo delle radici diretto è mostrato nella figura seguente



2. Si tracci il luogo delle radici inverso.

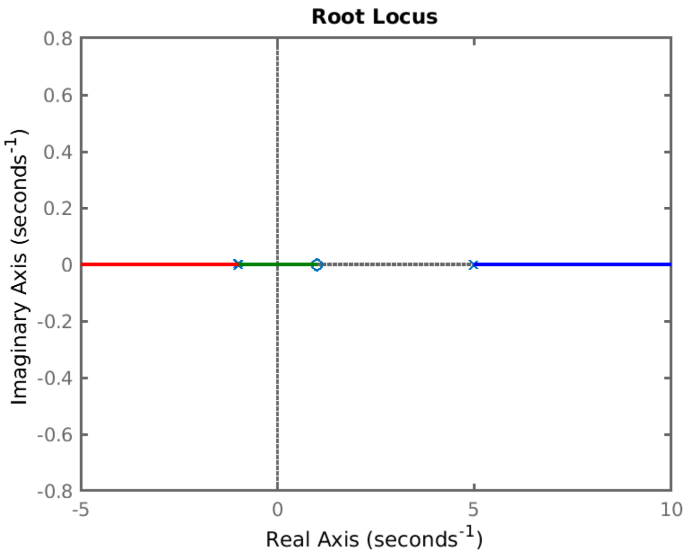
   Il luogo delle radici inverso è costituito da 3 rami, uno dei quali termina in uno zero, mentre gli altri due terminano all'infinito tramite un asintoto.
   Tale asintoto interseca l'asse reale nel punto

$$x_a = \frac{-1 - (1 + 1 - 5)}{2} = 1$$

   e forma con l'asse reale gli angoli

$$\theta_a = h180^\circ = 0^\circ, 180^\circ \qquad h = 1, 2$$

   Il luogo delle radici inverso è mostrato nella figura seguente



3. Sulla base dei luoghi tracciati, si determini l'insieme dei valori di ρ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

   Poiché il polo in 5 per qualunque valore di ρ, positivo o negativo, si trova sempre nel semipiano destro, non esiste alcun valore di ρ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

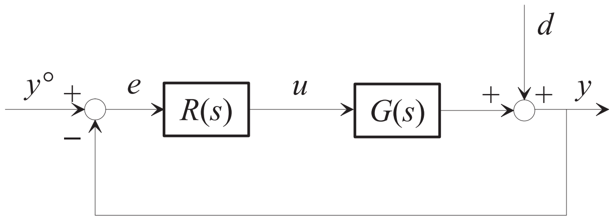
4. Sulla base dei luoghi tracciati, si determini il valore di ρ per cui il sistema in anello chiuso ha due poli sull'asse immaginario.

   Il grado relativo di $L(s)$ è pari a 2, è quindi possibile applicare la regola del baricentro.
   Poiché il baricentro vale 3, quando due poli si trovano sull'asse immaginario (e hanno quindi parte reale nulla) il terzo polo si troverà in 3. Punteggiando quindi in $\bar{s} = 3$ si ottiene

$$\rho = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4}{2} = 16$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente sistema di controllo:



dove $\quad G(s) = 1000\dfrac{1-0.1s}{(1+s)\,(1+0.01s)}$

1. Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

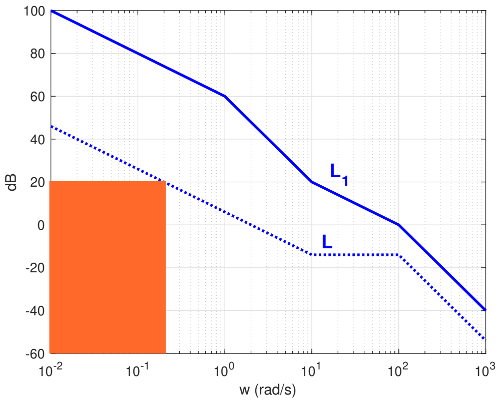
   - con un riferimento $y°(t) = sca(t)$, e in assenza del disturbo d, l'errore a transitorio esaurito e_∞ sia nullo;
   - un disturbo $d(t) = sin(\omega t)$ con $\omega \leq 0.2$ rad/s sia attenuato sull'uscita y di un fattore pari almeno a 10;
   - il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale di 70°;
   - la pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale di 1 rad/s.

   Essendo richiesto un errore a transitorio esaurito nullo in risposta a un riferimento a scalino, il tipo della funzione di trasferimento del regolatore, g_R, deve essere almeno pari a 1. Poniamo quindi $g_R = 1$. Il guadagno del regolatore è invece arbitrario: poniamo provvisoriamente $\mu_R = 1$. Il progetto statico si conclude quindi con la funzione di trasferimento $R_1(s) = \dfrac{1}{s}$.

   Il requisito di attenuazione del disturbo in linea d'andata impone invece il seguente vincolo sulla risposta in frequenza di L:
   $$|L(j\omega)| \geq 10, \quad \omega \leq 0.2$$
   generando graficamente una cosiddetta "zona proibita" per il modulo della risposta in frequenza di L.

   Per il progetto dinamico, consideriamo la funzione di trasferimento:
   $$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{1000}{s}\frac{1-0.1s}{(1+s)\,(1+0.01s)}$$

   Tracciandone il diagramma di Bode del modulo, ci si rende facilmente conto che il margine di fase è negativo o del tutto insufficiente. Tagliando l'asse a 0 dB alla pulsazione 1 con pendenza -1 si dovrebbe eseguire in bassa frequenza un cambiamento di pendenza per evitare la "zona proibita". Conviene allora tagliare alla pulsazione 2 e lasciare il diagramma di $|L|$ parallelo a quello di $|L_1|$ in bassa frequenza. Lo zero nel semipiano destro alla pulsazione 10 deve rimanere anche in L (non può essere cancellato). È infine possibile inserire un doppio cambiamento di pendenza alla pulsazione 100 per rendere la pendenza di $|L|$ uguale a quella di $|L_1|$ in alta frequenza:



Si ottiene quindi $\omega_c = 2$ rad/s e, per quanto riguarda fase critica e margine di fase:

$$\varphi_c = -90° - \arctan\left(\frac{2}{10}\right) - 2\arctan\left(\frac{2}{100}\right) = -90° - 11.3° - 2 \cdot 1.1° \approx -103.6°$$

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 76.4°$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = \frac{2}{s}\frac{1-0.1s}{(1+0.01s)^2}$$

L'espressione della funzione di trasferimento del controllore è quindi:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{0.002}{s}\frac{1+s}{1+0.01s}$$

2. Si valuti, con il controllore progettato precedentemente, l'errore a transitorio esaurito e_∞ quando $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = 1 + 2t, \quad t \geq 0$.
L'errore a transitorio esaurito dovuto al riferimento a scalino è nullo. Per quanto riguarda il disturbo, esso si può scrivere come $d(t) = sca(t) + 2ram(t)$. Si può quindi calcolare l'errore con il teorema del valore finale:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE_d(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{-1}{1+L(s)}D(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{-1}{1+\frac{2}{s}}\left(\frac{1}{s} + 2\frac{1}{s^2}\right) = -\lim_{s\to 0}\frac{s^2}{s+2}\left(\frac{s+2}{s^2}\right) = -1$$

Si può ottenere lo stesso risultato dalle tabelle di precisione statica.

3. Sempre con il controllore progettato in precedenza, si valuti quale sia la massima pulsazione di un disturbo $d(t) = sin(\omega t)$ per cui il disturbo stesso sia attenuato sull'uscita y di un fattore pari almeno a 100.
Il modulo di L assume il valore $40\,dB$ alla pulsazione $\omega = 0.02$ rad/s che è pertanto la massima pulsazione per cui il disturbo sia attenuato di un fattore 100.

ESERCIZIO 3

Si consideri un controllore digitale, con funzione di trasferimento $R(z)$, descritto in termini del legame tra il suo ingresso (l'errore discreto $e^*(k)$) e la sua uscita (la variabile di controllo discreta $u^*(k)$) da:

$$u^*(k) = \alpha u^*(k-2) + e^*(k)$$

1. Si chiarisca, giustificando la risposta, se l'equazione alle differenze scritta precedentemente corrisponde a un sistema dinamico strettamente proprio o no.

   Il regolatore digitale $R(z)$ descritto dall'equazione alle differenze non è strettamente proprio. Nella legge di controllo, infatti, $u^*(k)$ dipende dall'errore $e^*(k)$, allo stesso istante k.

2. Si determini la funzione di trasferimento, $R(z)$, del controllore digitale.

   Il legame tra l'errore e la variabile di controllo è assegnato mediante un'equazione alle differenze. Si può quindi procedere applicando la Trasformata Zeta al primo e al secondo membro ottenendo la funzione di trasferimento

$$R(z) = \frac{z^2}{z^2 - \alpha}$$

3. Si determini l'insieme dei valori del parametro α per cui il sistema rappresentato dalla funzione di trasferimento $R(z)$ è asintoticamente stabile.

   Il sistema con funzione di trasferimento $R(z)$ è asintoticamente stabile per $-1 < \alpha < 1$.

4. Ponendo $\alpha = 0.5$, si verifichi se il controllore digitale del punto precedente può derivare dalla discretizzazione, mediante il metodo di Eulero in avanti (o esplicito), del controllore analogico

$$R^o(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2 + 2s + 0.5}$$

   In caso affermativo si determini anche il periodo campionamento T compatibile con tale discretizzazione.

   Secondo il metodo di Eulero esplicito si ha

$$s = \frac{z-1}{T}$$

   Discretizzando il regolatore analogico $R^o(s)$ con il metodo di Eulero esplicito si ottiene

$$R(z) = R^o\left(\frac{z-1}{T}\right) = \frac{(z-1+T)^2}{z^2 + 2z(T-1) - 1.5T + 1}$$

   Evidentemente, se si pone il periodo di campionamento $T = 1$ ne segue che

$$R(z) = R^o(z-1) = \frac{z^2}{z^2 - 0.5}$$