# Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Prima prova scritta intermedia

Anno accademico 2013/2014

6 Maggio 2014

## Soluzioni

**Esercizio 1**

**1.1**

Il sistema è descritto dalle matrici:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\boldsymbol{K}_R = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\boldsymbol{K}_R) = \alpha$$

Il sistema è quindi completamente raggiungibile se e solo se $\alpha \neq 0$.

**1.2**

La matrice di osservabilità è:

$$\boldsymbol{K}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\boldsymbol{K}_O) = \alpha$$

Il sistema è quindi completamente osservabile se e solo se $\alpha \neq 0$.

**1.3**

Il polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}$ è:

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -\alpha \\ -\alpha & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 1) - \alpha^2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 - \alpha^2$$

Trattandosi di un polinomio di secondo grado, esso ha entrambe le radici a parte reale negativa se e solo se tutti i coefficienti sono concordi, il che avviene per $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$ .

**1.4**

La funzione di trasferimento del sistema si ottiene trasformando secondo Laplace, per $\alpha = 0$, le singole equazioni:

$$\begin{cases} sX_1 = -2X_1 + U \\ sX_2 = -X_2 \\ Y = X_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{1}{s+2}U \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+2}$$

La funzione di trasferimento ha denominatore di grado 1 perché corrisponde alla sola parte raggiungibile e osservabile del sistema. L'autovalore in –2 è coerente con il fatto che il sistema è asintoticamente stabile.

**Esercizio 2**

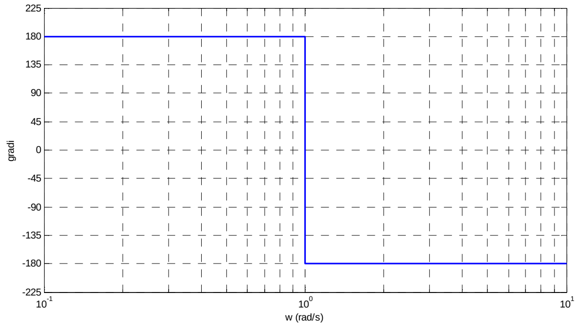
**2.1**

Dalla pendenza iniziale (+2) del diagramma si deduce che il sistema ha due zeri nell’origine (tipo −2). Dal modulo alla pulsazione 1 si deduce che il guadagno vale 100. Alla pulsazione 1 la pendenza passa da +2 a –2, per cui vi sono 4 poli. Un’espressione della funzione di trasferimento compatibile con il diagramma è quindi:

$$G(s) = 100\frac{s^2}{(1+s)^4}$$

**2.2**

Il diagramma asintotico della fase si ricava facilmente:




**2.3**

Anzitutto il sistema è asintoticamente stabile per cui si può calcolare l’uscita di regime.

La presenza di zeri nell’origine (derivatori) fa sì che l’uscita corrispondente all’ingresso costante sia nulla.

Alla pulsazione 1 il modulo della risposta in frequenza, in virtù dei 4 poli coincidenti, scende di 12 dB rispetto ai 40 dB del diagramma vero. Ne consegue che il modulo varrà:

$$|G(j)| = \frac{100}{\sqrt{2}^4} = 25$$

Per evidenti ragioni di simmetria, invece, la fase della risposta in frequenza vale 0.

Pertanto:

$$y(t) = 25\sin(t)$$

**2.4**

Applicando il teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty}\left[s\frac{G(s)}{s}\right] = \lim_{s\to\infty}\left[100\frac{s^2}{(1+s)^4}\right] = 0$$

Poiché il sistema è asintoticamente stabile, si può applicare il teorema del valore finale:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{G(s)}{s}\right] = \lim_{s\to 0}\left[100\frac{s^2}{(1+s)^4}\right] = 0$$

**Esercizio 3**

**3.1**

Gli stati di equilibrio si ottengono risolvendo le equazioni:

$$\begin{cases} \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 - \bar{u} = 0 \\ e^{\bar{x}_2} + \bar{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 = -1 \\ e^{\bar{x}_2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = -1 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

In corrispondenza si ha:

$$\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2\bar{u} = 1$$

**3.2**

Linearizzando il sistema si ha:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = (\bar{x}_2 + 1)\delta x_1 + \bar{x}_1\delta x_2 - \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = e^{\bar{x}_2}\delta x_2 + \delta u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \delta x_1 - \delta x_2 - \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = \delta x_2 + \delta u \end{cases}$$

$$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2 - 2\delta u$$

Risulta:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = -2$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}$ è quindi:

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

Avendo due autovalori reali positivi, il sistema linearizzato è instabile e lo è anche lo stato di equilibrio del sistema di partenza.

**3.3**

La funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 =$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-1 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 = \frac{-1}{(s-1)^2} - 2 = \frac{-2s^2 + 4s - 3}{(s-1)^2}$$

**3.4**

Posto:

$$u(t) = \bar{u} + \delta u(t), \quad \delta u(t) = \mathrm{sca}(t)$$

si ottiene:

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$$

con:

$$\delta Y(s) = \frac{-2s^2 + 4s - 3}{s(s-1)^2} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s-1} + \frac{\gamma}{(s-1)^2} = \frac{\alpha(s-1)^2 + \beta s(s-1) + \gamma s}{s(s-1)^2} = \frac{(\alpha+\beta)s^2 + (-2\alpha - \beta + \gamma)s + \alpha}{s(s-1)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ -2\alpha - \beta + \gamma = 4 \\ \alpha = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Quindi:

$$\delta y(t) = -3 + e^t - te^t, \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = -2 + e^t - te^t, \quad t \geq 0$$

**Esercizio 4**

**4.1**

Poiché $G_2(s)$ non è chiusa in un anello di retroazione, è necessario che sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema nel suo complesso.

**4.2**

Elaborando lo schema a blocchi si ottiene:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\left[G_1(s) + G_2(s)\right]\dfrac{G_3(s)}{1+G_3(s)}}{1 + G_1(s)\dfrac{G_3(s)}{1+G_3(s)}} = \frac{\left[G_1(s) + G_2(s)\right]G_3(s)}{1 + G_3(s) + G_1(s)G_3(s)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\left[\dfrac{\alpha}{s} + \dfrac{1}{s+1}\right]\dfrac{s+1}{(s+2)^2}}{1 + \dfrac{s+1}{(s+2)^2} + \dfrac{\alpha}{s}\dfrac{s+1}{(s+2)^2}} = \frac{(\alpha+1)s + \alpha}{s(s+2)^2 + s(s+1) + \alpha(s+1)} = \frac{(\alpha+1)s + \alpha}{s^3 + 5s^2 + (5+\alpha)s + \alpha}$$

**4.3**

Si utilizza il criterio di Routh:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5+\alpha & 0 \\ 5 & \alpha & 0 \\ \dfrac{25+4\alpha}{5} & 0 & \\ \alpha & & \end{array}$$

Il sistema è quindi asintoticamente stabile per:

$$\begin{cases} \alpha > -\dfrac{25}{4} \\ \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha > 0$$

**4.4**

Le istruzioni MATLAB sono:

```
G=tf([2 1],[1 5 6 1]);
step(G)
```