Prima prova scritta intermedia 2007/2008
Soluzione

Bascetta

Esercizio 1

1.1

Detta x_1 la corrente nell'induttore e x_2 la tensione sul condensatore, si ha

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= x_2 + R(u - x_1) \\ C\dot{x}_2 &= u - x_1 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 + \frac{R}{L}u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

1.2

Trasformando le equazioni del sistema a partire da stato iniziale nullo si ottiene

$$\begin{aligned} sLX_1(s) &= X_2(s) + R\left(U(s) - X_1(s)\right) \\ sCX_2(s) &= U(s) - X_1(s) \\ Y(s) &= X_2(s) \end{aligned}$$

e risolvendo il sistema di equazioni si ricava

$$G(s) = \frac{sL}{LCs^2 + RCs + 1}$$

La funzione di trasferimento determinata è di tipo -1.

1.3

Posto $R = 1$ si ha

$$G(s) = \frac{sL}{LCs^2 + Cs + 1} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Dall'analisi del denominatore si ricava $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{LC}$. Ne consegue $LC = 16$.

1.4

Il guadagno statico del sistema è nullo. All'equilibrio, infatti, la caduta di tensione sull'induttore e la corrente nel condensatore saranno nulle. La caduta di tensione sul ramo RC in parallelo all'induttore e, quindi, sul condensatore sarà dunque nulla.

Esercizio 2

2.1

Il sistema è asintoticamente stabile ($T_1 > 0$ e $T_2 > 0$), sono quindi applicabili sia il teorema del valore iniziale che quello del valore finale. Da questi si ricava

$$\begin{aligned}
y(0) &= \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \mu \frac{1 + s\tau}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = 0 \\
\dot{y}(0) &= \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} \mu \frac{s(1 + s\tau)}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = \frac{\mu\tau}{T_1 T_2} \\
y(\infty) &= \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \mu \frac{1 + s\tau}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = \mu
\end{aligned}$$

La risposta $y(t)$ presenta una sovraelongazione se lo zero si trova tra i due poli e l'asse immaginario, ovvero se $\tau > \max(T_1, T_2)$.

2.2

Le condizioni da imporre sui parametri della funzione di trasferimento sono

$$\frac{a}{c} = G(0) = 5, \qquad b = 2\xi\omega_n = 2 \cdot 0.25 \cdot 4, \qquad c = \omega_n^2 = 16$$

da cui si ricava la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{80}{s^2 + 2s + 16}$$

La posizione dei poli di $G(s)$ è mostrata in Figura 1.

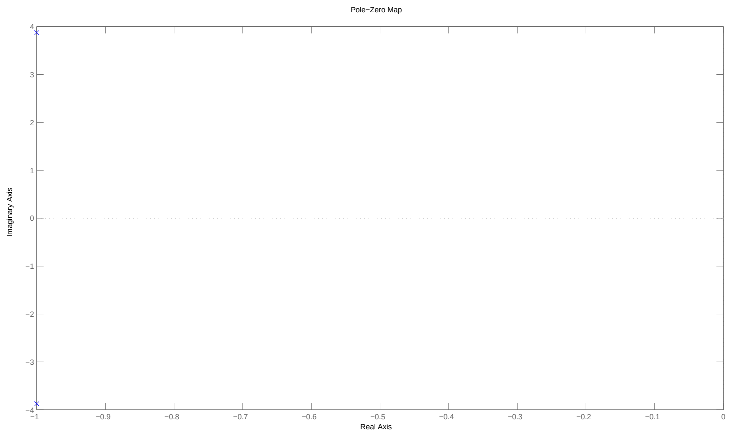

Figura 1: Posizione di poli e zeri di $G(s)$.

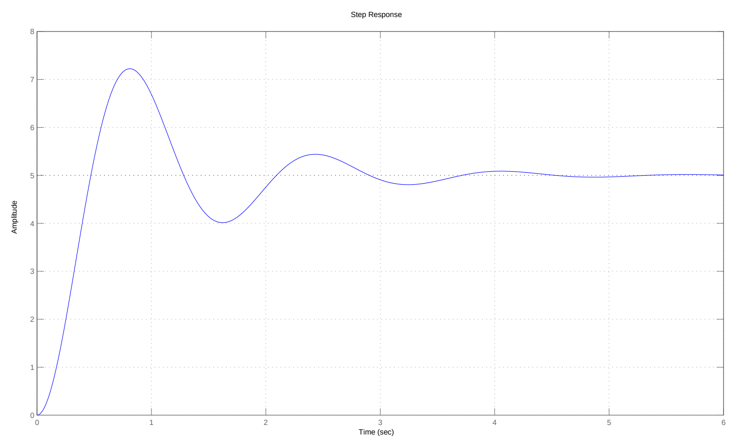

Figura 2: Risposta allo scalino di $G(s)$.

2.3

La risposta allo scalino di $G(s)$ è visibile in Figura 2.

Esercizio 3

3.1

Gli stati di equilibrio (valori di $\bar{x}$ che annullano la derivata) si ricavano dalla seguente equazione

$$(\bar{x}+2)^2 = (2\bar{x}+7)$$

le cui soluzioni con $\bar{u}=1$ sono $\bar{x}=1$, $\bar{x}=-3$.

3.2

Linearizzando il sistema si ricava

$$\begin{aligned} \dot{\delta x} &= -2\left(\bar{x}-\bar{u}+2\right)\delta x + \left(2\bar{x}+7\right)\delta u \\ \delta y &= \delta x \end{aligned}$$

Nel punto di equilibrio $\bar{u}=1$, $\bar{x}=1$ si ha

$$\begin{aligned} \dot{\delta x} &= -4\delta x + 9\delta u \\ \delta y &= \delta x \end{aligned}$$

in $\bar{u}=1$, $\bar{x}=-3$

$$\begin{aligned} \dot{\delta x} &= 4\delta x + \delta u \\ \delta y &= \delta x \end{aligned}$$

3.3

Il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $\bar{u}=1$, $\bar{x}=1$ ha un autovalore reale negativo ($\lambda=-4$) ed è quindi asintoticamente stabile.
Il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $\bar{u}=1$, $\bar{x}=-3$ ha, invece, un autovalore reale positivo ($\lambda=4$) ed è quindi instabile.

3.4

Consideriamo il sistema linearizzato nel punto di equilibrio $\bar{u}=1$, $\bar{x}=1$

$$\begin{aligned} \dot{\delta x} &= -4\delta x + 9\delta u \\ \delta y &= \delta x \end{aligned}$$

il movimento dello stato e dell'uscita saranno

$$
\begin{aligned}
\delta y(t) = \delta x(t) &= \delta x(0) e^{-4t} + \int_0^t e^{-4(t-\tau)} 9 e^{3\tau}\, d\tau \\
&= \delta x(0) e^{-4t} + 9 e^{-4t} \int_0^t e^{7\tau}\, d\tau \\
&= \delta x(0) e^{-4t} + 9 e^{-4t} \left[\frac{e^{7\tau}}{7} \right]_0^t \\
&= \left(\delta x(0) - \frac{9}{7} \right) e^{-4t} + \frac{9}{7} e^{3t}
\end{aligned}
$$