Fondamenti di Automatica

Prof. Bascetta

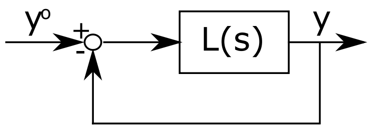
17 Giugno 2019

SOLUZIONE

Fondamenti di Automatica
Proff. Luca Bascetta, Paolo Rocco e Gian Paolo Incremona

Seconda prova intermedia
17 Giugno 2019

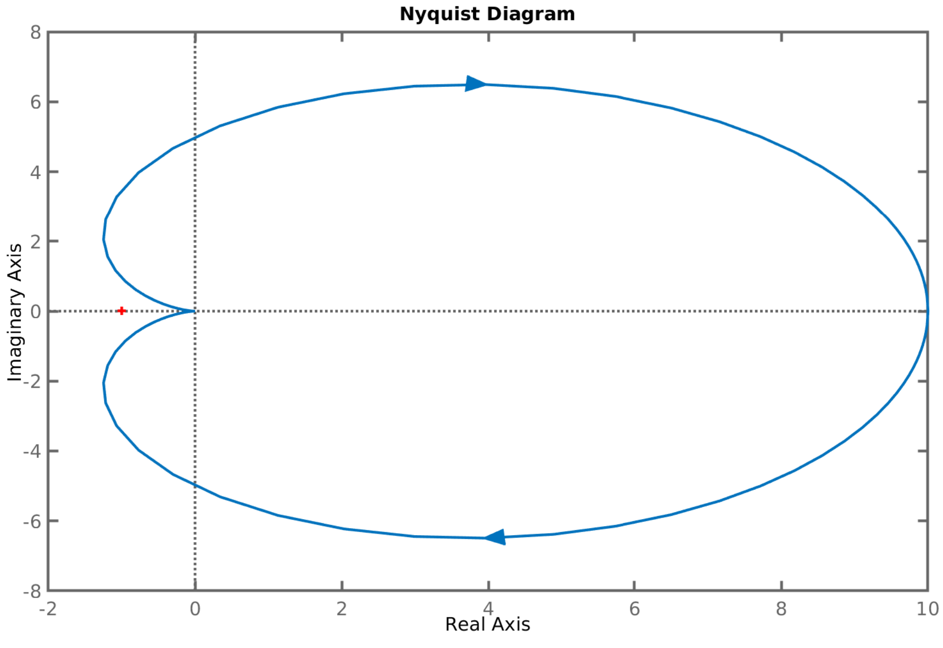
ESERCIZIO 1
Si consideri il sistema di controllo di figura, con y variabile controllata e y^o riferimento



in cui $\quad L(s) = \dfrac{10}{(1+s)^2}$.

1. Si disegni il diagramma di Nyquist associato alla funzione di trasferimento d'anello $L(s)$.

   Il diagramma di Nyquist di $L(s)$ è mostrato in figura.



2. Si studi, utilizzando il criterio di Nyquist, la stabilità del sistema in anello chiuso.

   $L(s)$ non ha poli nel semipiano destro, quindi $P_d = 0$.
   Dal diagramma di Nyquist si può facilmente notare che il diagramma non compie alcun giro intorno

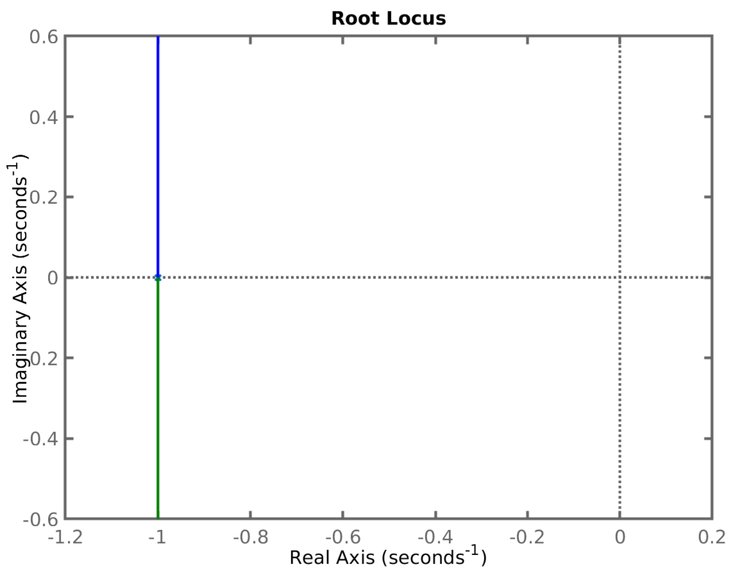
al punto -1, quindi $N = 0$.
Grazie al criterio di Nyquist, essendo $N = P_d$, possiamo concludere che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

3. Posto $L'(s) = kL(s)$, si spieghi, utilizzando il criterio di Nyquist, se il sistema in anello chiuso con funzione di trasferimento d'anello $L'(s)$ è asintoticamente stabile per qualunque valore positivo di k. Motivare la risposta.

   Il diagramma di Nyquist di $L(s)$ non taglia l'asse reale negativo in alcun punto (e il diagramma di Bode della fase di $L(s)$ raggiunge $-180°$ solo asintoticamente), possiamo quindi concludere che il margine di guadagno di $L(s)$ è infinito.
   Essendo il margine di guadagno infinito il sistema in anello chiuso con funzione di trasferimento d'anello $L'(s)$ è asintoticamente stabile per qualunque valore positivo di k.

4. Si verifichi il risultato del punto precedente utilizzando il luogo delle radici.

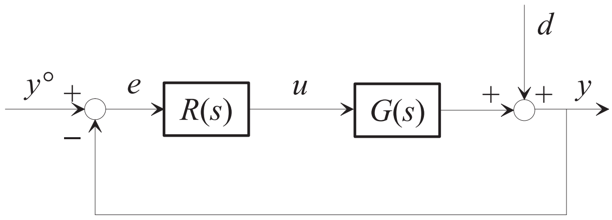
   Il luogo delle radici diretto di $L'(s) = \dfrac{10k}{(1+s)^2} = \dfrac{\rho}{(1+s)^2}$ è mostrato in figura.



È immediato verificare che i due poli, per qualunque valore di $k > 0$, sono sempre contenuti nel semipiano sinistro. Il sistema in anello chiuso è quindi sempre asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente sistema di controllo:



dove $\quad G(s) = \dfrac{10}{(1+s)^2\,(1+s/3)}.$

1. Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

   - con un riferimento $y°(t) = 10sca(t)$, e in assenza del disturbo d, l'errore $e(t) = y°(t) - y(t)$ soddisfi la limitazione, a transitorio esaurito, $|e_\infty| < 0.15$;
   - il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale di 50°;
   - la pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale di 1 rad/s;
   - il controllore sia di ordine non superiore a 2.

   Essendo richiesto un errore a transitorio esaurito finito ma non necessariamente nullo, è sufficiente che la funzione di trasferimento d'anello abbia tipo g_L nullo, e quindi che anche il tipo della funzione di trasferimento del regolatore, g_R, sia nullo.

   In questo caso, l'errore vale:

$$|e_\infty| = \frac{10}{1 + 10\mu_R} \leq 0.15$$

   Per soddisfare la specifica dovremo quindi imporre:

$$\mu_R \geq \frac{10 - 0.15}{1.5} = 6.56$$

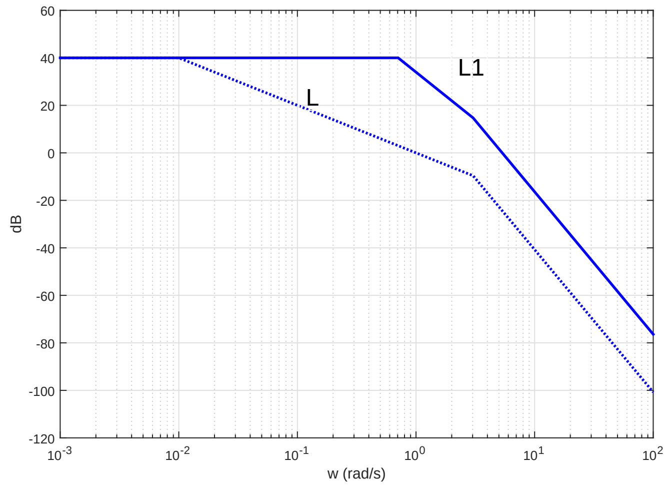
   È opportuno scegliere $\mu_R = 10$ per cui il progetto statico si conclude con

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}} = 10$$

   Per il progetto dinamico, consideriamo la funzione di trasferimento:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{100}{(1+s)^2\,(1+0.33s)}$$

   Tracciandone il diagramma di Bode del modulo, ci si rende subito conto, per il taglio dell'asse a 0 dB con pendenza -3, che il margine di fase è negativo o del tutto insufficiente. Si sceglie allora di tagliare alla pulsazione 1 con pendenza -1, raccordando il diagramma di $|L|$ a quello di $|L_1|$ in bassa frequenza. Per avere un regolatore di ordine non superiore a 2, il polo del sistema alla pulsazione 3 non deve essere cancellato, mentre se ne può inserire un altro alla stessa pulsazione:



Si ottiene quindi $\omega_c = 1$ e, per quanto riguarda fase critica e margine di fase:

$$\varphi_c = -\arctan\left(\frac{1}{0.01}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = -89^\circ - 2 \cdot 18.4^\circ \approx -126^\circ$$
$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 54^\circ$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte e risulta:

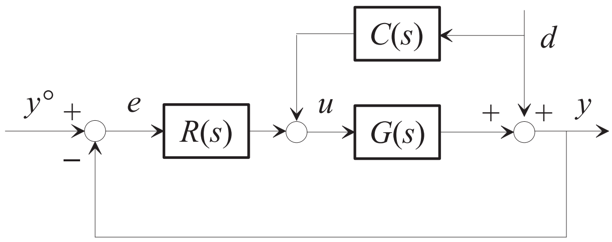
$$L(s) = \frac{100}{(1+100s)\,(1+0.33s)^2}$$

L'espressione della funzione di trasferimento del controllore è quindi:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)} = 10\frac{(1+s)^2}{(1+100s)\,(1+0.33s)}$$

2. Si disegni lo schema a blocchi del sistema di controllo del presente esercizio comprensivo di un compensatore del disturbo d.

   Lo schema a blocchi è riportato di seguito:



3. Senza determinarne la funzione di trasferimento, si scriva la relazione che deve essere soddisfatta dalla risposta in frequenza del compensatore affinché l'effetto di un disturbo $d(t) = sin(2t)$ sia annullato a transitorio esaurito sull'uscita y.

La relazione è la seguente:

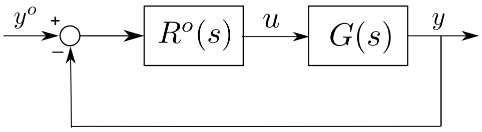
$$C(2j)G(2j) + 1 = 0$$

Pertanto:

$$C(2j) = -1/G(2j) = -\frac{(1 + 2j)^2\,(1 + 0.66j)}{10}$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema di controllo a tempo continuo in figura:



dove $\quad R^o(s) = \dfrac{3}{s} \quad$ e $\quad G(s) = \dfrac{10}{(s+10)} \quad .$

1. Si determini un valore adeguato del tempo di campionamento T_C. Con la scelta effettuata e tenendo conto del ritardo intrinseco di conversione, si verifichi che il margine di fase sia maggiore di 60^o.

   Dato il regolatore analogico:
   $$R^o(s) = \frac{3}{s}\ ,$$
   la funzione di trasferimento d'anello del sistema di controllo analogico risulta:
   $$L(s) = \frac{30}{s(s+10)}\ .$$
   Si verifica facilmente che la pulsazione critica è $\omega_c = 3$ rad/s. Come noto la pulsazione di Nyquist va scelta decisamente superiore alla pulsazione critica e un adeguato criterio è:
   $$\Omega_N = 10\omega_c = 30$$
   da cui si ricava il valore del periodo di campionamento:
   $$T_C = \frac{\pi}{\Omega_N} = \frac{\pi}{30} \approx 0.1;.$$
   La fase critica del sistema di controllo analogico risulta:
   $$\varphi_c = -90^o - \arctan(0.3) = -106.7^o$$
   e il margine di fase:
   $$\varphi_m = 180^o - |\varphi_c| \approx 73.3^o$$
   Il decremento di margine di fase, dovuto al ritardo intrinseco di conversione $T_C/2$, vale
   $$\Delta\varphi_m = -\omega_c \frac{T_C}{2}\frac{180^o}{\pi} = -\frac{\omega_c}{\Omega_N}90^o = -9^o$$
   Pertanto il margine di fase, tenendo conto anche del ritardo intrinseco di conversione, vale 64.3^o ed è quindi superiore a 60^o.

2. Si ricavi, adottando la trasformazione di Tustin (del trapezio), la funzione di trasferimento $R^*(z)$ del corrispondente regolatore digitale.

   Per ricavare la funzione di trasferimento del regolatore digitale discretizzando $R^o(s)$ adottando la trasformazione di Tustin
   $$s = \frac{2}{T_C}\frac{z-1}{z+1}$$

è sufficiente sostituire alla variabile complessa s in $R^o(s)$ l'espressione di s in funzione della variabile complessa z:

$$R^*(z) = R^o\left(\frac{2}{T_C}\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{0.15(z+1)}{z-1} \ .$$

3. Considerando il regolatore digitale $R^*(z)$ trovato al punto precedente, si espliciti l'equazione alle differenze che lega $u^*(k)$ ed $e^*(k)$.

   Essendo

   $$R^*(z) = \frac{U^*(z)}{E^*(z)}$$

   si può esprimere il legame tra le Trasformate Zeta dell'uscita e dell'ingresso del regolatore digitale, utilizzando l'espressione della funzione di trasferimento del regolatore come

   $$\frac{U^*(z)}{E^*(z)} = \frac{0.15(1+z^{-1})}{1-z^{-1}} \Rightarrow U^*(z)(1-z^{-1}) = E^*(z)0.15(1+z^{-1})$$

   da cui la medesima relazione nel dominio del tempo discreto risulta

   $$u^*(k) = u^*(k-1) + 0.15e^*(k) + 0.15e^*(k-1) \ .$$

4. Si chiarisca, giustificando la risposta, se l'equazione alle differenze trovata al punto precedente corrisponde a un sistema dinamico strettamente proprio o no.

   Il regolatore digitale $R^*(z)$ non è strettamente proprio. Presenta infatti lo stesso numero di poli e zeri e, nella legge di controllo, $u^*(k)$ dipende dall'errore $e^*(k)$, allo stesso istante k.