



Modello e Controllo di un Quadricottero

Corso di Fondamenti di Automatica

Gian Paolo Incremona

6 Giugno 2018



Outline

1. Modello
2. Controllo in hovering
3. Controllo per inseguimento di traiettoria
4. Simulazioni MATLAB

Modello

Equazioni del moto

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x} &= \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2 \frac{\cos\psi \cos\phi \sin\theta + \sin\phi \sin\psi}{m} \\ \ddot{y} &= \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2 \frac{\cos\psi \cos\phi \sin\theta - \sin\phi \sin\psi}{m} \\ \ddot{z} &= \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2 \frac{\cos\theta \cos\phi}{m} - g \\ \dot{p} &= \frac{I_y - I_z}{I_x} qr + \frac{bl}{I_x} (\Omega_4^2 - \Omega_2^2) - \frac{J_m}{I_x} q\Omega_R \\ \dot{q} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} pr + \frac{bl}{I_y} (\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + \frac{J_m}{I_y} p\Omega_R \\ \dot{r} &= \frac{I_x - I_y}{I_z} pq + \frac{d}{I_z} (-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \end{aligned} \right.$$

Notazione

(x, y, z) é la posizione del centro di massa rispetto agli assi terra;

(ϕ, θ, ψ) é il vettore degli angoli di Eulero che individuano l'orientamento della terna corpo rispetto alla terna fissa;

$I \text{ diag}(I_x, I_y, I_z)$, è il tensore di inerzia riferito agli assi corpo;

b, d sono opportuni coefficienti aerodinamici;

l distanza del centro dell' i esimo rotore rispetto al centro del quadricottero;

m massa del quadricottero;

Ω_i velocità dell' i esimo rotore;

J_m inerzia del rotore rispetto al proprio asse di rotazione;

(p, q, r) componenti del vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto agli assi corpo;

Ω_R é ottenuto come $\Omega_R = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$.

Ipotesi

- Non si è assunto $I_x = I_y$ ovvero una struttura a croce perfettamente simmetrica;
- Sono stati considerati anche gli effetti di resistenza aerodinamica;
- È stato trascurato il termine $M_{iz}^2 = J_{mz}\dot{\Omega}_i$;
- Gli ingressi delle equazioni di moto sono rappresentati da combinazioni dei quadrati delle velocità delle quattro pale. Si possono identificare **quattro principali moti** che il quadricottero può eseguire:
 - 1 spostamento in direzione dell'asse di rotazione dei rotori;
 - 2 rollio rispetto agli assi corpo;
 - 3 beccheggio rispetto agli assi corpo;
 - 4 imbardata rispetto agli assi corpo.

Ingressi del modello

Possiamo quindi ridefinire coerentemente gli ingressi delle equazioni di moto come segue:

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 b\Omega_i^2$$

$$U_2 = bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2)$$

$$U_3 = bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)$$

$$U_4 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$$

U_1 (N) rappresenta una forza in direzione degli assi di rotore;

U_2 (Nm) rappresenta una coppia di rollio;

U_3 (Nm) rappresenta una coppia di beccheggio;

U_4 (Nm) rappresenta una coppia di imbardata.

Linearizzazione in hovering

La condizione di volo in **hovering** è caratterizzata da **quota costante e velocità longitudinale nulla** e condizione di equilibrio:

$$z = \bar{z}, \quad \bar{\phi} = \bar{\theta} = \bar{\psi} = 0$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= U_1 \frac{\cos \psi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi}{m} \quad (\text{Moto lungo } x) \end{aligned}$$

che all'equilibrio diventa

$$\bar{v}_x = 0, \quad \forall \bar{x}$$

Linearizzazione in hovering (cont'ed)

$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_y = U_1 \frac{\sin \psi \cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \psi}{m} \quad \text{(Moto lungo } y)$$

che all'equilibrio diventa

$$\bar{v}_y = 0, \quad \forall \bar{y}$$

$$\dot{z} = v_z$$

$$\dot{v}_z = U_1 \frac{\cos \theta \cos \phi}{m} - g \quad \text{(Moto lungo } z)$$

che all'equilibrio diventa

$$\bar{v}_z = 0, \quad \forall \bar{z}, \quad \bar{U}_1 = mg$$

Linearizzazione in hovering (cont'ed)

$$\dot{p} = \frac{I_y - I_z}{I_x} qr + \frac{U_2}{I_x} - \frac{J_m}{I_x} q \Omega_R \quad (\text{Moto di rollio})$$

che all'equilibrio diventa

$$\bar{U}_2 = 0$$

$$\dot{q} = \frac{I_z - I_x}{I_y} pr + \frac{U_3}{I_y} - \frac{J_m}{I_y} p \Omega_R \quad (\text{Moto di beccheggio})$$

che all'equilibrio diventa

$$\bar{U}_3 = 0$$

$$\dot{r} = \frac{I_x - I_y}{I_z} pq + \frac{U_4}{I_z} \quad (\text{Moto di imbardata})$$

che all'equilibrio diventa

$$\bar{U}_4 = 0$$

- Per come sono definite le componenti di $\vec{\omega}$ secondo gli assi corpo

$$p = -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi}$$

$$q = -\dot{\psi} \cos \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \phi$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi$$

si ha che in condizioni di hovering ($\bar{\psi} = \bar{\theta} = \bar{\phi} = 0$) anche le componenti di $\vec{\omega}$ secondo gli assi corpo sono nulle: $\bar{p} = \bar{q} = \bar{r} = 0$;

- tutte le posizioni costanti $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ corrispondenti a velocità lineari nulle sono equilibri;

Osservazioni (cont'ed)

- essendo $\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = \bar{U}_4 = 0$, all'equilibrio i quadrati delle velocità dei rotori sono uguali;
- $U_1 = mg$ per reggere il carico verticale dovuto al peso del quadricottero e per avere tale forza si dovrà avere

$$\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}_3 = \bar{\Omega}_4 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

Il caso con il '-' è impossibile perchè le pale non creerebbero più portanza.

Sistema linearizzato

Consideriamo il sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio determinato:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= \delta v_x \\ \delta\dot{v}_x &= \frac{\bar{U}_1}{m} \delta\theta \quad (\text{Moto lungo } x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{y} &= \delta v_y \\ \delta\dot{v}_y &= -\frac{\bar{U}_1}{m} \delta\phi \quad (\text{Moto lungo } y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{z} &= \delta v_z \\ \delta\dot{v}_z &= \frac{\delta U_1}{m} \quad (\text{Moto lungo } z)\end{aligned}$$

$$\delta\dot{p} = \frac{\delta U_2}{I_x} \quad (\text{Moto di rollio trascurando i termini dipendenti da } \Omega_R)$$

$$\delta\dot{q} = \frac{\delta U_3}{I_y} \quad (\text{Moto di beccheggio})$$

$$\delta\dot{r} = \frac{\delta U_4}{I_z} \quad (\text{Moto di imbardata})$$

Controllo in hovering

Specifiche di progetto

Per mantenere il quadricottero in condizioni di hovering è necessario **controllare la quota z e l'assetto (ϕ, θ, ψ)** , non è invece necessario agire sulle altre direzioni di moto (x, y) .

Cominciamo analizzando il controllo di quota. Vogliamo che tale sistema abbia una **banda di circa 5 Hz** e sia caratterizzato da una risposta con **oscillazioni smorzate**. Possiamo tradurre queste caratteristiche nelle seguenti specifiche:

- $\varphi_m \geq 60^\circ$;
- $\omega_c \geq 30$ rad/s;
- é inoltre opportuno chiedere **errore nullo a transitorio esaurito almeno a fronte di variazioni a scalino** del riferimento di quota.

Progetto del controllore

Il sistema da controllare ha la seguente equazione

$$\delta \ddot{z} = \frac{\delta U_1}{m}$$

ovvero

$$G_z(s) = \frac{\Delta Z(s)}{\Delta U_1(s)} = \frac{1}{ms^2}$$

Relativamente all'analisi statica, assumendo $g_R = 0$ la funzione di trasferimento d'anello ha comunque **tipo 2**, sufficiente a garantire errore nullo a transitorio esaurito sia rispetto a riferimenti a scalino che a rampa. Assunto allora $R_1(s) = 1$ avremo $L_1(s) = \frac{1}{ms^2}$. Analizziamo il diagramma di Bode del modulo di questa funzione di trasferimento. Da ora in poi assumiamo $m = 0.5$ kg.

Progetto del controllore (cont'ed)

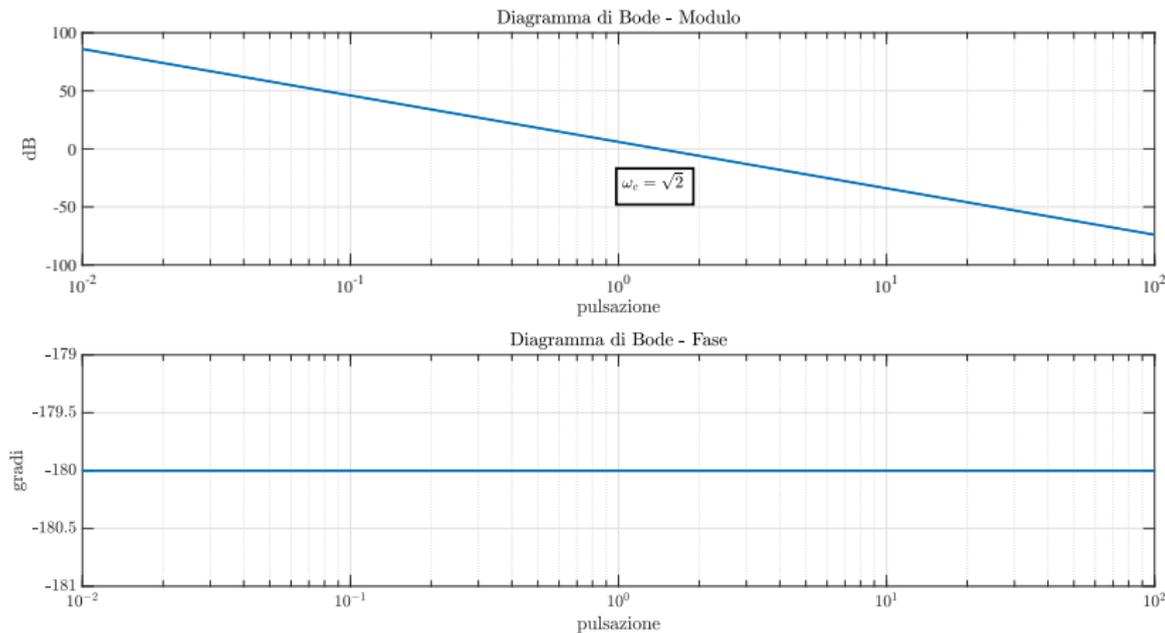


Diagramma di Bode di $L_1(s)$

Progetto del controllore (cont'ed)

Prima di continuare il progetto è opportuno riflettere sulla struttura che potrebbe avere il controllore e verificare se esso sia compatibile con quella di un PID. Per poter tagliare l'asse a 0 dB con pendenza -1 è necessario introdurre uno zero prima della pulsazione critica ω_c ; conseguentemente si dovrà introdurre un polo in alta frequenza per rendere realizzabile il regolatore. Dall'analisi appena effettuata risulta che un **regolatore PD** sia sufficiente a soddisfare le specifiche.

Non avendo vincoli dal progetto statico possiamo imporre una **pulsazione critica di 40 rad/s** circa e inserire uno zero ed un polo rispettivamente una decade prima ed una decade dopo ω_c .

Progetto del controllore (cont'ed)

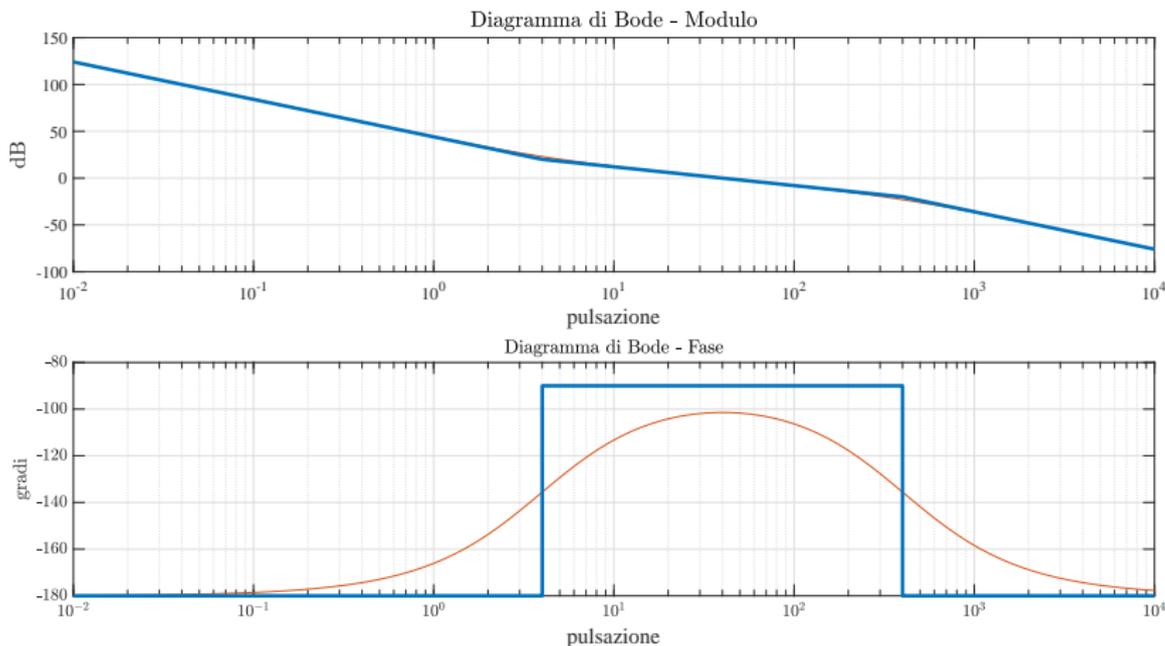


Diagramma di Bode di $L(s)$

Progetto del controllore (cont'ed)

La bassa frequenza di $L(s)$ sarà quindi $\frac{\mu}{s^2}$ ed imponendo il passaggio a 20 dB alla pulsazione 4 rad/s si ottiene $\mu = 160$. La funzione di trasferimento d'anello sarà quindi:

$$L(s) = \frac{160}{s^2} \frac{1 + 0.25s}{1 + 0.0025s}$$

da cui deriva il seguente regolatore

$$R_z(s) = 80 \frac{1 + 0.25s}{1 + 0.0025s} = 80 \left(1 + \frac{0.2475s}{1 + 0.0025s} \right)$$

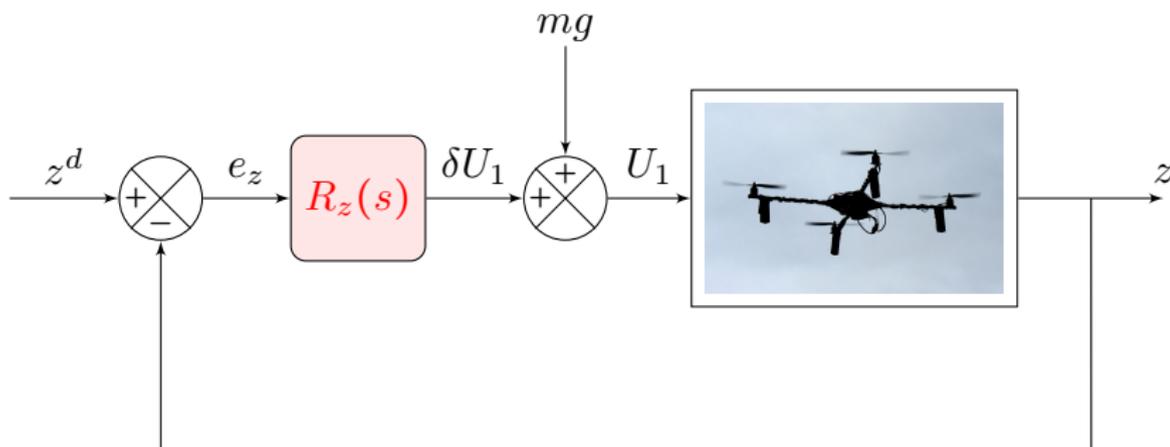
Progetto del controllore (cont'ed)

Verifichiamo che tale regolatore soddisfi le specifiche

- $\omega_c \simeq 40 \text{ rad/s}$;
- $\varphi_c = -180^\circ + \text{atan}(0.25 \cdot 40) - \text{atan}(0.0025 \cdot 40) \simeq -101.42^\circ$;
 $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 78.58^\circ$.

Per implementare correttamente **il regolatore appena determinato è opportuno ricordare che esso è stato realizzato sulla base del modello linearizzato nell'intorno della condizione di hovering**. Esso quindi non fornirà U_1 ma bensì δU_1 , cioè lo scostamento rispetto al valore di regime \bar{U}_1 . Il sistema sarà descritto dal seguente schema a blocchi.

Progetto del controllore (cont'ed)



Schema a blocchi con regolatore di quota

Progetto del controllore (cont'ed)

Analizziamo ora i **controllori d'assetto**. Consideriamo innanzitutto la relazione fra le variabili p, q, r e le velocità espresse come derivate degli angoli di Eulero:

$$p = -\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\phi}$$

$$q = \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi$$

Se consideriamo le medesime equazioni in condizioni di hovering ($\bar{\phi} = \bar{\theta} = \bar{\psi} = 0$) si ottiene:

$$p = \dot{\phi}$$

$$q = \dot{\theta}$$

$$r = \dot{\psi}$$

Progetto del controllore (cont'ed)

Finchè quindi il quadricottero si muove nell'intorno delle condizioni di hovering potremo confondere le derivate di p, q, r con le derivate seconde degli angoli di Eulero.

Assunti per i momenti d'inerzia i seguenti valori numerici

$$I_x = I_y = 0.005 \text{ kgm}^2$$

$$I_z = 0.01 \text{ kgm}^2$$

i tre sistemi da controllare hanno la seguente forma

$$\delta \dot{p} = \delta \ddot{\phi} = 200 \delta U_2$$

$$\delta \dot{q} = \delta \ddot{\theta} = 200 \delta U_3$$

$$\delta \dot{r} = \delta \ddot{\psi} = 100 \delta U_4$$

Progetto del controllore (cont'ed)

Le **funzioni di trasferimento complessive** sono:

$$G_{\phi}(s) = \frac{\Delta\Phi(s)}{\Delta U_2(s)} = \frac{200}{s^2}$$

$$G_{\theta}(s) = \frac{\Delta\Theta(s)}{\Delta U_3(s)} = \frac{200}{s^2}$$

$$G_{\psi}(s) = \frac{\Delta\Psi(s)}{\Delta U_4(s)} = \frac{100}{s^2}$$

Progetto del controllore (cont'ed)

Come si può notare tutte le funzioni di trasferimento sono uguali a meno del guadagno e hanno una funzione di trasferimento simile a quella vista per il controllo di quota. Possiamo quindi procedere, come già fatto in precedenza, utilizzando un **regolatore PD**. Manterremo identica anche la tecnica utilizzata per la sintesi di tale controllore e le specifiche (**banda di 5 Hz e margine di fase di 60°**). Per tutti e tre i regolatori avremo quindi la medesima funzione di trasferimento d'anello:

$$L(s) = \frac{160}{s^2} \frac{1 + 0.25s}{1 + 0.0025s}$$

da cui si ricavano i regolatori

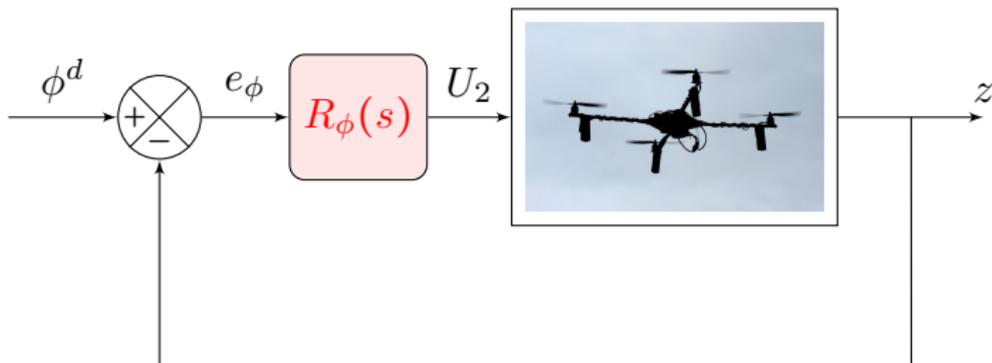
$$R_\phi(s) = 0.8 \left(1 + \frac{0.2475s}{1 + 0.0025s} \right)$$

$$R_\theta(s) = 0.8 \left(1 + \frac{0.2475s}{1 + 0.0025s} \right)$$

$$R_\psi(s) = 1.6 \left(1 + \frac{0.2475s}{1 + 0.0025s} \right)$$

Progetto del controllore (cont'ed)

Poichè a regime le condizioni di hovering sono $\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = \bar{U}_4 = 0$, i tre schemi di controllo sono come il seguente:



Schema a blocchi con regolatore d'assetto per l'angolo ϕ

Controllo per inseguimento di traiettoria

Controllo per inseguimento di traiettoria

Nel caso dell'hovering il quadricottero è in grado di volare a quota costante rimanendo fermo. É ovviamente di interesse anche far eseguire al quadricottero delle traiettorie nel piano $z = \bar{z}$, controllando la posizione x, y . Per fare questo **supporremo che il quadricottero si muova ancora nell'intorno delle condizioni di hovering** in modo da poterlo ancora approssimare mediante il suo modello linearizzato e, soprattutto, poter ritenere validi gli anelli di controllo precedentemente progettati.

Controllo per inseguimento di traiettoria (cont'ed)

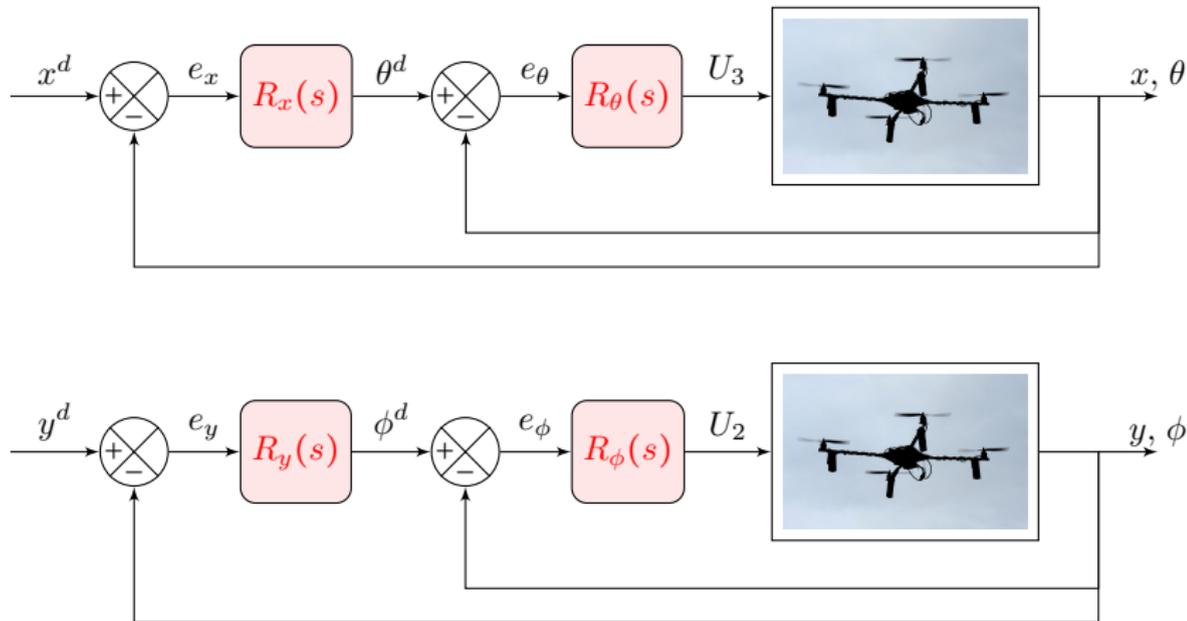
Con riferimento al modello linearizzato, le equazioni di moto nel piano $z = \bar{z}$ sono:

$$\delta\ddot{x} = \frac{\bar{U}_1}{m} \delta\theta = g\delta\theta$$
$$\delta\ddot{y} = -\frac{\bar{U}_1}{m} \delta\theta = -g\delta\phi$$

Per controllare i moti lungo x e y è quindi necessario agire sugli angoli ϕ e θ che diverranno, quindi, le variabili di controllo dei regolatori $R_x(s)$ e $R_y(s)$.

Controllo per inseguimento di traiettoria (cont'ed)

Dovremo considerare quindi i seguenti schemi di controllo (**in cascata**)



Schema di controllo in cascata

Controllo per inseguimento di traiettoria (cont'ed)

Analizziamo per esempio il primo schema. Sappiamo che il sistema in anello chiuso da θ^d e θ può essere descritto, in modo approssimato, da un filtro passa-basso del primo ordine il cui estremo superiore è a **40 rad/s**.

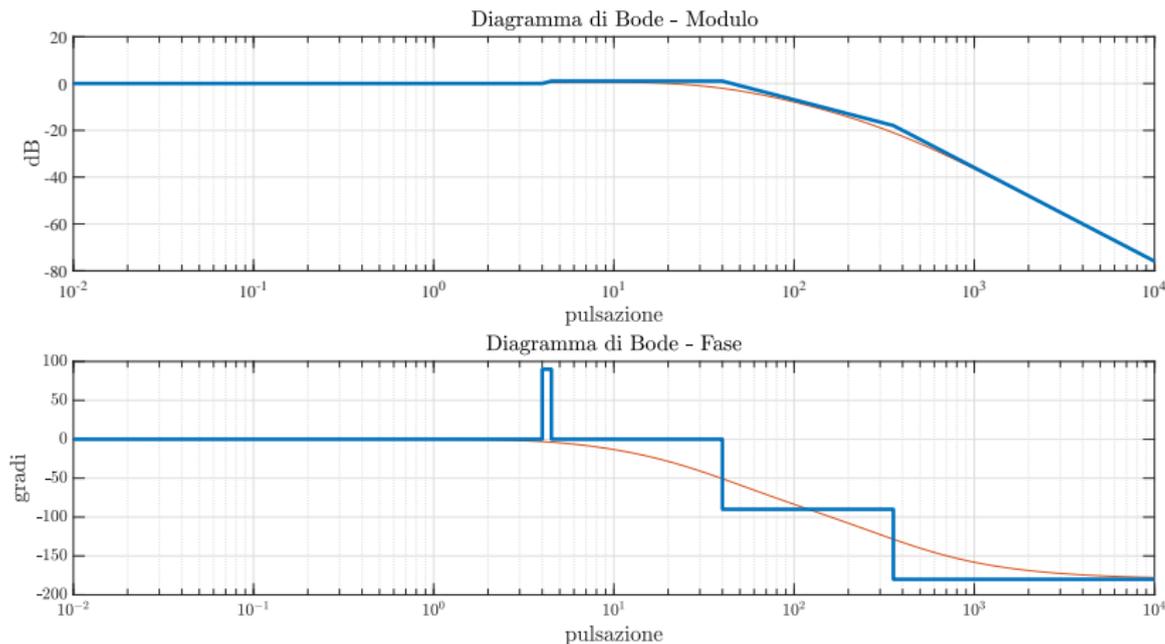


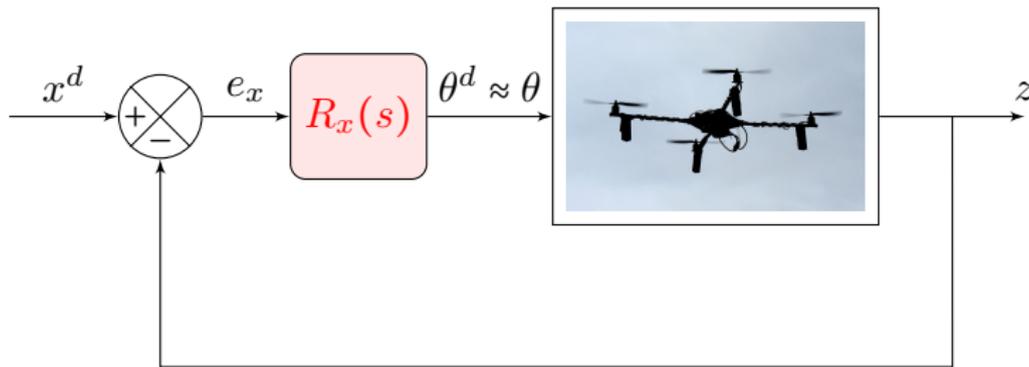
Diagramma di Bode di $F(s)$

Controllo per inseguimento di traiettoria (cont'ed)

Supponiamo di voler progettare, per x e y , due anelli con una **banda di circa 1 Hz** e caratterizzati da risposte smorzate,

$$\omega_c \geq 10 \text{ rad/s} \quad \varphi_m \geq 60^\circ$$

Se supponiamo inoltre di scegliere una **pulsazione critica non maggiore di 10 rad/s** possiamo approssimare la funzione di trasferimento $\frac{\Theta(s)}{\Theta^d(s)}$ con un sistema algebrico a guadagno unitario. Lo schema di controllo si semplifica come segue:



Schema a blocchi semplificato

Controllo per inseguimento di traiettoria (cont'ed)

Lo stesso ragionamento si può ripetere per il controllo di y . Le funzioni di trasferimento sulla base delle quali progettare $R_x(s)$ e $R_y(s)$ sono:

$$G_x(s) = \frac{\Delta X(s)}{\Delta \Theta(s)} = g \frac{1}{s^2}$$

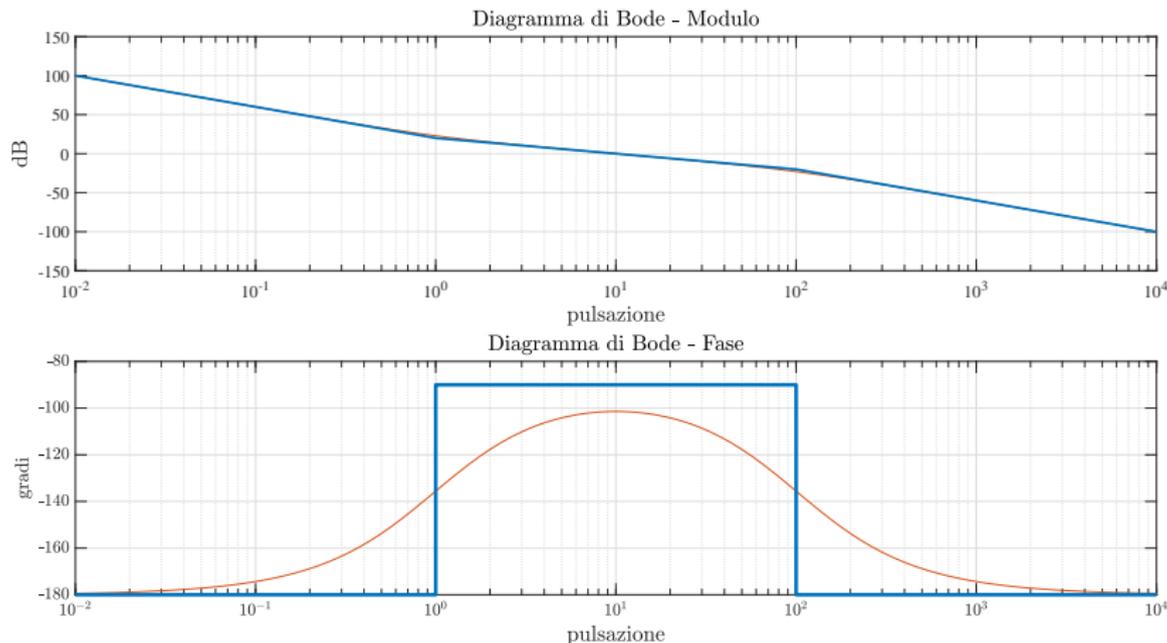
$$G_y(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta \Phi(s)} = -g \frac{1}{s^2}$$

Anche in questo caso possiamo procedere alla sintesi con lo stesso metodo usato in precedenza. Fissiamo **la pulsazione critica a 10 rad/s** e introduciamo uno zero e un polo rispettivamente una decade prima e una dopo ω_c :

$$L(s) = \frac{10}{s^2} \frac{1+s}{1+0.01s}$$

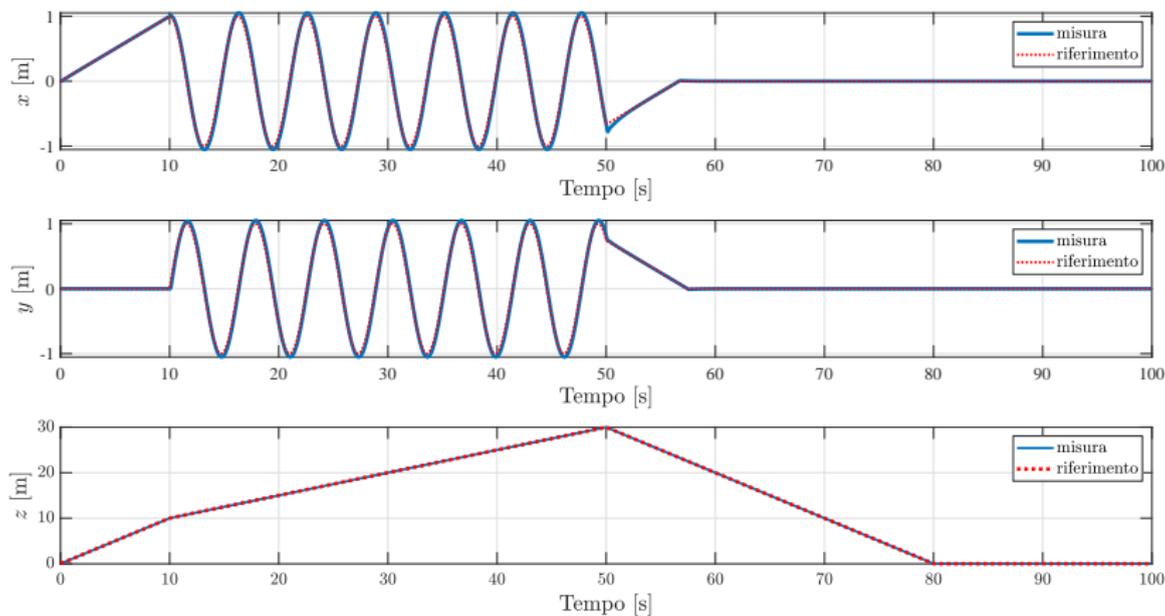
$$R_x(s) = 1.02 \left(1 + \frac{0.99s}{1+0.01s} \right) \quad R_y(s) = -1.02 \left(1 + \frac{0.99s}{1+0.01s} \right)$$

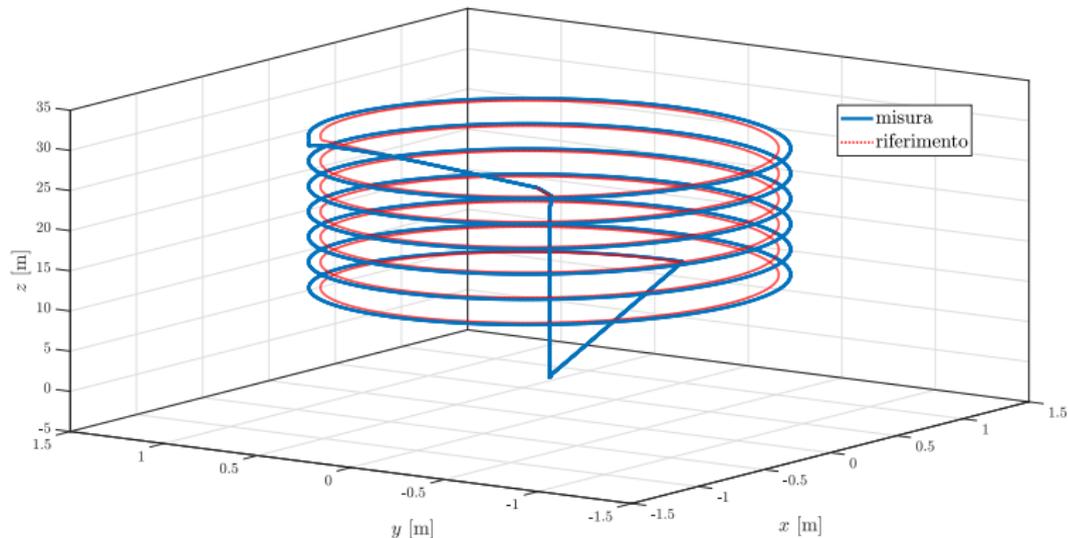
Controllo per inseguimento di traiettoria (cont'ed)

Diagramma di Bode di $L(s)$

Simulazioni MATLAB

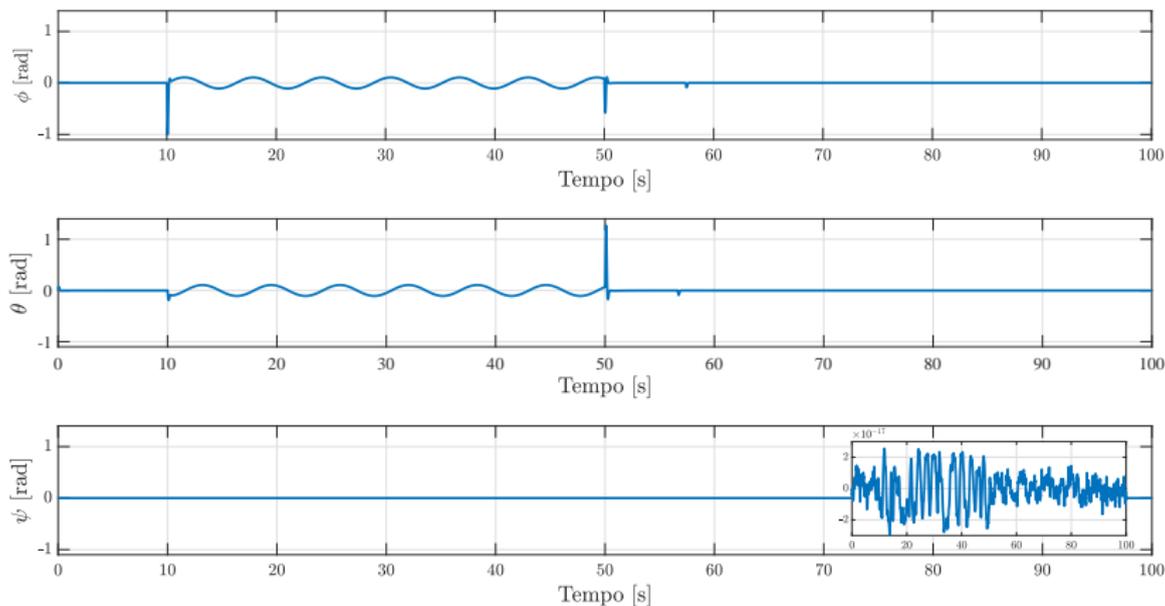
Risultati

Evoluzione nel tempo di (x, y, z)



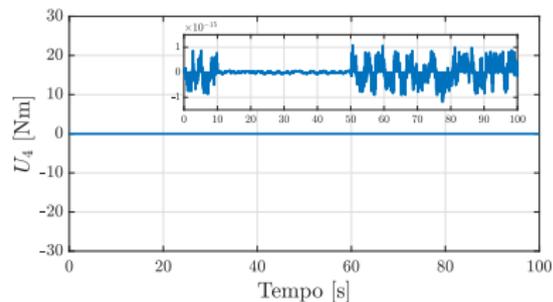
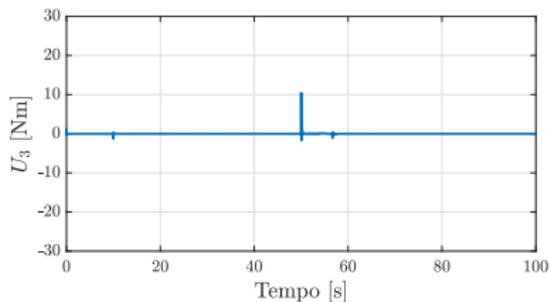
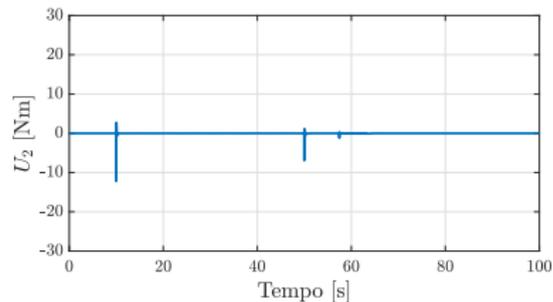
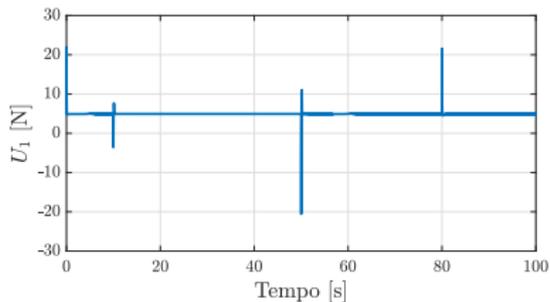
Inseguimento di una traiettoria a spirale nello spazio

Risultati (cont'ed)



Evoluzione nel tempo degli angoli di Euler (ϕ, θ, ψ)

Risultati (cont'ed)



Evoluzione nel tempo della forza in direzione degli assi di rotore e delle coppie di rollio, beccheggio e imbardata