Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Seconda prova scritta intermedia

Anno accademico 2015/2016

1 Luglio 2016

Soluzioni

Esercizio 1

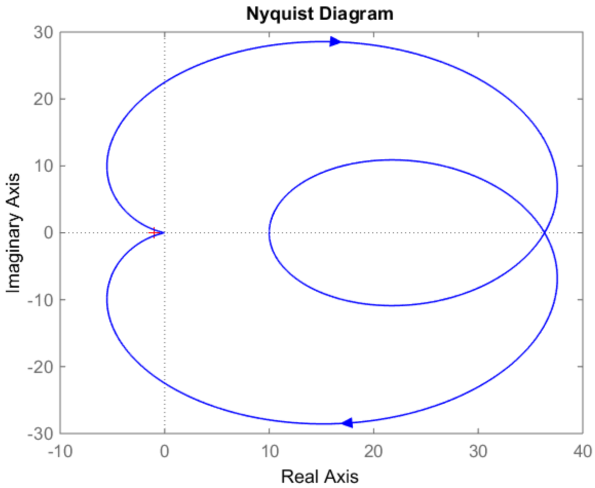
1.1

Analizzando i diagrammi di Bode si evince che la pulsazione critica ω_c è circa 10 rad/s. In corrispondenza la fase critica vale circa -155° da cui si deduce che il margine di fase è $\varphi_m \cong 25°$.

Alla pulsazione alla quale la fase vale -180° il modulo in dB vale circa -30 dB. Ne consegue che il margine di guadagno espresso in dB è circa 30.

1.2

Il diagramma polare di L si traccia facilmente a partire dai diagrammi di Bode. Si osservi che inizialmente sia il modulo che la fase crescono, per poi diminuire. Di conseguenza si traccia il diagramma di Nyquist. Poiché il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, il diagramma non gira intorno al punto -1.



1.3

Poiché il margine di fase è piccolo, è opportuno approssimare la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso con quella di un sistema del secondo ordine. Lo smorzamento ξ dei poli può essere valutato con la formula:

$$\xi = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) = 0.22$$

Il tempo di assestamento al 99% si ottiene come:

$$\tau_{a1} = \frac{\ln(100)}{\xi\omega_c} = \frac{4.6}{0.22 \times 10} = 2.09$$

1.4

Poiché $L(s)$ ha tipo nullo e guadagno μ_L pari a 10, l'errore a transitorio esaurito vale:

$$e_\infty = \frac{1}{1+\mu_L} = \frac{1}{11} = 0.0909$$

Esercizio 2

2.1

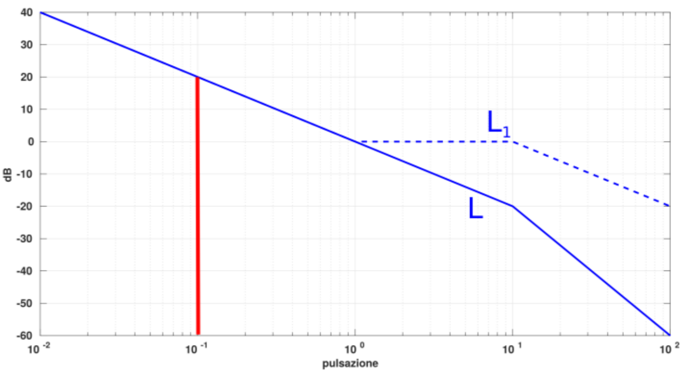
Poiché è richiesto errore nullo a transitorio esaurito, è necessario che la funzione di trasferimento d'anello abbia tipo g_L unitario, e quindi che il regolatore abbia tipo g_R = 1 (non vi sono invece vincoli sul guadagno del regolatore).

Pertanto: $R_1(s) = \dfrac{\mu_R}{s^{g_R}} = \dfrac{1}{s}$

Il requisito di attenuazione del disturbo in linea di andata comporta che: $|L(j0.1)| \geq 20\text{dB}$ (si osservi che $H(s)$ alla pulsazione 0.1 rad/s è assimilabile a un guadagno unitario).

Per il progetto dinamico, consideriamo la funzione di trasferimento:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{1+s}{s(1+0.1s)}$$



Per il tracciamento del modulo di L si osservi che, supponendo ω_c = 1, occorrerà cancellare lo zero a pulsazione 1. Il polo alla pulsazione 10 può invece essere mantenuto.

La fase critica e il margine di fase valgono:

$$\varphi_c = -90° - \arctan(0.1) = -95°$$

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 180° - 95° = 85°$$

Le specifiche sono soddisfatte e risulta:

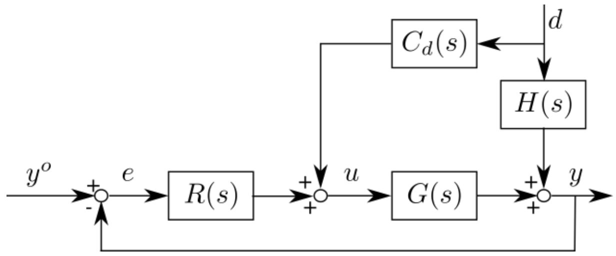
$$L(s) = \frac{1}{s(1+0.1s)},$$

da cui si ottiene l'espressione della funzione di trasferimento del controllore:

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = \frac{1}{s(1+s)}.$$

2.2

Lo schema a blocchi di un sistema di controllo in retroazione che include un compensatore del disturbo è mostrato in figura.



2.3

Per poter annullare l'effetto del disturbo d sull'uscita, la risposta in frequenza del compensatore del disturbo deve soddisfare la seguente relazione:

$$H(j0.1) + C_d(j0.1)G(j0.1) = 0$$

Da cui si ricavano le due equazioni reali:

$$|C_d(j0.1)| = \frac{1}{\sqrt{1+0.01}} \cong 1$$

$$\angle C_d(j0.1) = -180^\circ - \arctan(0.1) \cong -186^\circ$$

Una possibile struttura della funzione di trasferimento del compensatore che soddisfa i precedenti vincoli è la seguente:

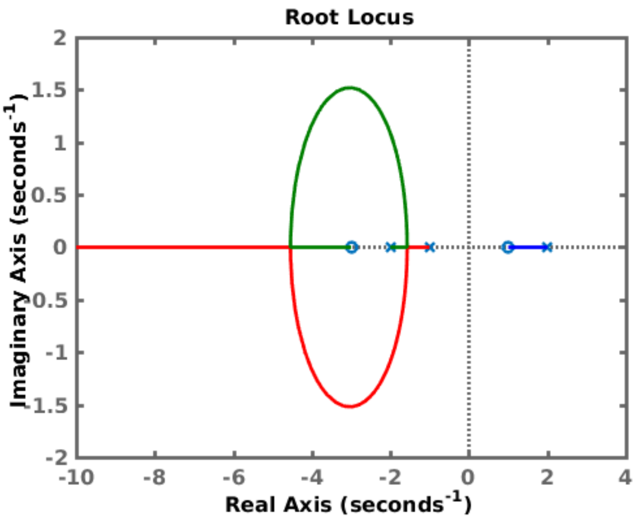
$$C_d(s) = \frac{\mu}{(1+sT)^3} \qquad \mu > 0\,,\ T > 0$$

Esercizio 3

3.1

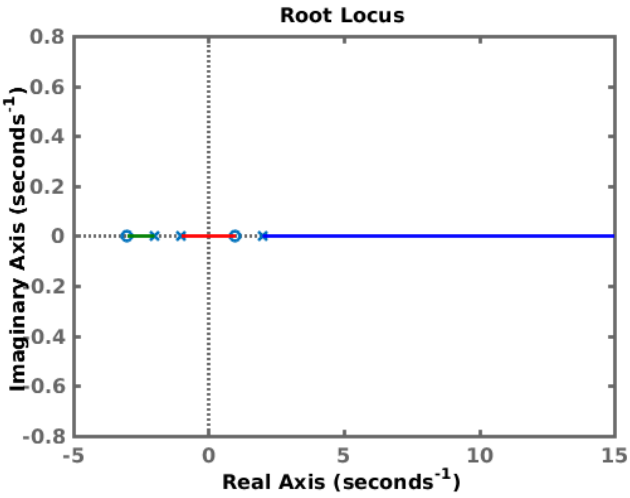
Risulta $m = 2$, $n = 3$, $z_1 = -1$, $z_2 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = -2$. Vi è quindi un asintoto che coincide con l'asse reale.

Il luogo diretto è tracciato in figura:



3.2

Il luogo inverso è tracciato in figura:



3.3

Considerando il luogo inverso e punteggiando in $\bar{s} = 0$ si ottiene:

$$|\rho| = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \rho = -\frac{4}{3}$$

Sostituendo tale valore nell'espressione del polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso risulta:

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)(s-2) - \frac{4}{3}(s-1)(s+3)$$

e valutando il polinomio in zero:

$$\chi(0) = (1)(2)(-2) - \frac{4}{3}(-1)(3) = 0$$

Il sistema in anello chiuso ha quindi un polo nell'origine.

3.4

Per il tracciamento del luogo delle radici di *L(s)* con MATLAB è sufficiente utilizzare le seguenti istruzioni:

```
L = tf([1 2 -3], [1 1 -4 -4]);
rlocus(-L)
```

Esercizio 4

4.1

Le formule del moto libero e forzato di stato e uscita sono le seguenti:

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0+\sum_{i=0}^{k-1}\left[\boldsymbol{A}^{k-i-1}\boldsymbol{Bu}(i)\right]$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{CA}^k\boldsymbol{x}_0+\sum_{i=0}^{k-1}\left[\boldsymbol{CA}^{k-i-1}\boldsymbol{Bu}(i)\right]$$

4.2

Risulta:

$$\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{Ax}_0=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}(2)=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}(3)=\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

4.3

Passando nel dominio della trasformata Zeta si ha:

$$\begin{cases}zX_1(z)=X_2(z)\\zX_2(z)=X_3(z)\\zX_3(z)=U(z)\end{cases}$$
$$Y(z)=X_1(z)+X_2(z)+X_3(z)$$

Con semplici passaggi si ottiene:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}=\frac{z^2+z+1}{z^3}$$

Avendo tutti i poli in z = 0, il sistema è asintoticamente stabile.

4.4

Risulta:

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=z^{-3}+z^{-2}+z^{-1}\quad\Rightarrow\quad Y(z)=\left(z^{-3}+z^{-2}+z^{-1}\right)U(z)$$

Riportando l’equazione nel dominio del tempo, si ottiene:

$$y(k)=u(k-1)+u(k-2)+u(k-3)$$

Poiché il guadagno della funzione di trasferimento è pari a 3, y tenderà a 3 a fronte di uno scalino unitario.