Fondamenti di Automatica
Prof. Luca Bascetta

Soluzioni della prima prova scritta intermedia
26 aprile 2017

ESERCIZIO 1

E' assegnato il sistema dinamico a tempo continuo, lineare e invariante con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -20x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = 3x_3(t) \\ y(t) = 2x_1(t) \end{cases}$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema.

   Trasformando con Laplace le equazioni di stato e di uscita del sistema assegnato:

$$\begin{cases} sX_1(s) = -2X_1(s) + 3X_2(s) \\ sX_2(s) = -20X_2(s) + U(s) \\ sX_3(s) = 3X_3(s) \\ Y(s) = 2X_1(s) \end{cases}$$

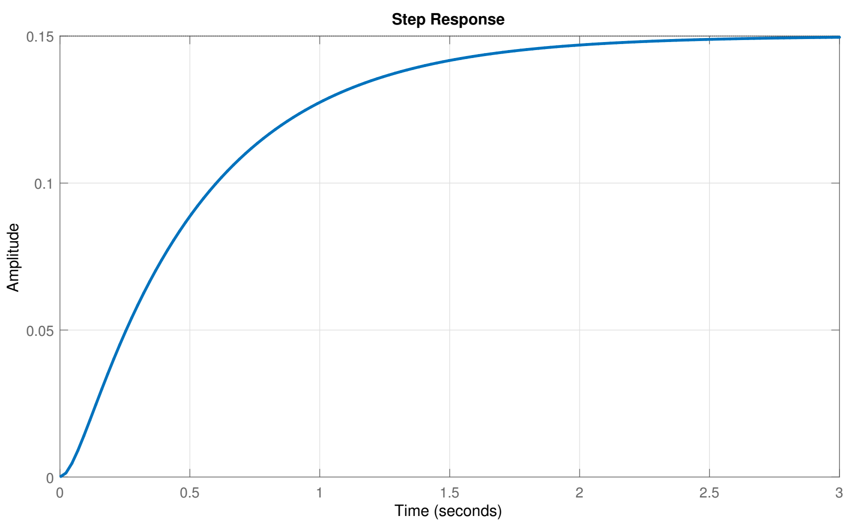
   Per eliminazione, si arriva a calcolare il rapporto tra la Trasformata di Laplace dell'uscita e quella dell'ingresso (con stato iniziale nullo), cioè la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{6}{(s+2)(s+20)}$$

   Si osservi che $G(s)$ non ha zeri e ha due poli certamente a parte reale negativa in quanto il polinomio al denominatore ha tutti i coefficienti positivi. In particolare, calcolando esplicitamente i poli, essi risultano $s_1 = -2$ e $s_2 = -20$.

2. Si disegni, in un grafico, l'andamento qualitativo dell'uscita (forzata) all'ingresso $u(t) = sca(t)$.

   La risposta (forzata) allo scalino del sistema con la funzione di trasferimento $G(s)$ appena calcolata, parte da $t = 0$ con derivata prima nulla e concavità positiva per poi assestarsi, dopo un transitorio, al valore di regime $\mu = G(0) = \frac{3}{20}$. Inoltre, essendo le due costanti di tempo dei poli molto differenti tra loro, è lecito stimare la durata del transitorio basandosi sulla costante di tempo maggiore tra le due, cioè $\tau_{dominante} = 0.5\ s$. Il tempo di assestamento sarà quindi $t_a \cong 4.6\tau_{dominante} = 2.3\ s$.



3. Si dica, giustificando la risposta, se il movimento libero dello *stato* del sistema tende a zero qualunque sia lo stato iniziale.

   Ritornando alla rappresentazione di stato del sistema, si osserva che la matrice dinamica è triangolare superiore e di conseguenza i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale, cioè $s_1 = -2$, $s_2 = -20$ e $s_3 = +3$. Appare quindi evidente che il movimento libero della terza variabile di stato, a partire da uno stato iniziale generico, $x_{3l}(t) = e^{3t}x_3(0)$, non tende a zero qualsiasi sia $x_3(0)$.

4. Si calcoli la matrice di raggiungibilità del sistema e si dica se esso è completamente raggiungibile.

   La matrice di raggiungibilità è $K_R = [B\, AB \dots A^{n-1}B]$, quindi, per il sistema in studio risulta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -66 \\ 1 & -20 & 400 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   che, essendo una matrice singolare, ci permette di concludere che il sistema assegnato non è completamente raggiungibile.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento:

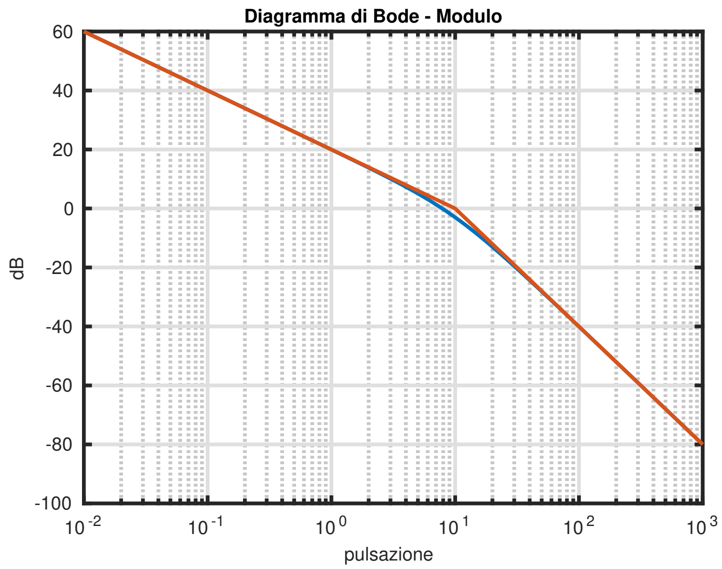
$$G(s) = \frac{100}{s} \frac{1+s}{(1-s)(s+10)}$$

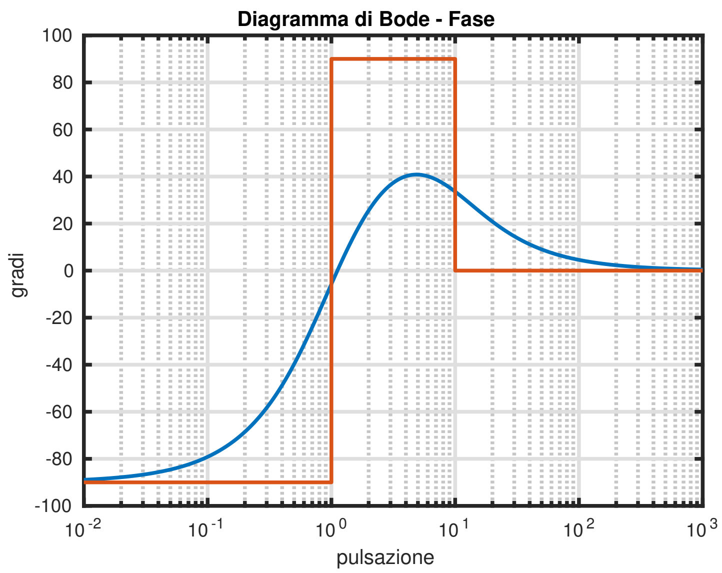
1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a $G(s)$.

   La funzione di trasferimento può essere riscritta come

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1+s}{(1-s)(1+0.1s)}$$

   La funzione di trasferimento ha tipo uno, guadagno pari a 10, un polo nel semipiano sinistro ed uno nel semipiano destro, e uno zero nel semipiano sinistro. I diagrammi asintotici sono riportati di seguito:





2. Si scrivano le istruzioni MATLAB per la definizione della funzione di trasferimento $G(s)$, il tracciamento dei diagrammi di Bode della risposta in frequenza associata a $G(s)$ ed il tracciamento della risposta allo scalino unitario.

   La funzione MATLAB per la definizione della funzione di trasferimento $G(s)$ è

$$G = 10 * tf\left([1,1], conv\left([-1,1,0], [0.1,1]\right)\right);$$

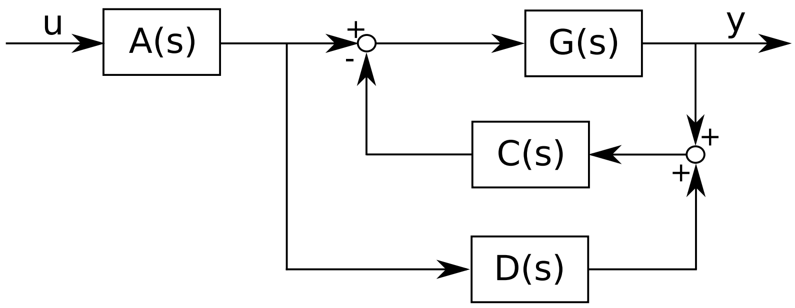
La funzione MATLAB per il tracciamento dei diagrammi di Bode della risposta in frequenza associata a $G(s)$ è

$$bode(G)$$

La funzione MATLAB per il tracciamento della risposta allo scalino unitario è

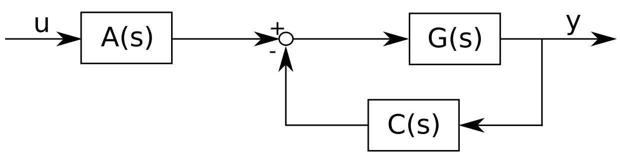
$$step(G)$$

3. Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



Assumendo $A(s) = 2$, $C(s) = 1$ e $D(s) = \frac{1}{s}$, si determini la funzione di trasferimento da u a y.

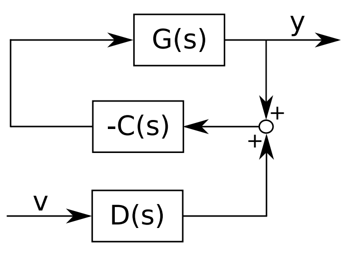
E' possibile risolvere facilmente lo schema a blocchi utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, introducendo un nuovo ingresso $V(s) = A(s)U(s)$.
Considerando ora $v = 0$, si ottiene il seguente schema a blocchi:



in cui si riconosce una serie tra il blocco $A(s)$ e la retroazione negativa tra i blocchi $G(s)$ e $C(s)$. La funzione di trasferimento tra u ed y calcolata a partire da questo schema risulta quindi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = A(s)\frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

Se ora si considera $u = 0$, si ottiene invece il seguente schema a blocchi:



in cui si riconosce nuovamente una serie tra il blocco $D(s)$ e la retroazione positiva tra i blocchi $G(s)$ e $-C(s)$. La funzione di trasferimento tra v ed y calcolata a partire da questo schema risulta quindi:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = D(s)\frac{-G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

Ricordando ora che $V(s) = A(s)U(s)$ e sommando i due contributi si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = A(s)\frac{1 - C(s)D(s)}{\frac{1}{G(s)} + C(s)}$$

Sostituendo, infine, ad $A(s)$, $C(s)$, $D(s)$ e $G(s)$ le rispettive espressioni si ottiene la seguente funzione di trasferimento:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = A(s)\frac{1 - C(s)D(s)}{\dfrac{1}{G(s)} + C(s)} = 2\frac{1 - \dfrac{1}{s}}{0.1s\dfrac{(1-s)\,(1+0.1s)}{1+s}} = \frac{20}{s}\frac{(1+s)(1-s)}{0.1s^3 + 0.9s^2 - 11s - 10}$$

4. Si dica, motivando la risposta, se il sistema descritto dallo schema a blocchi del punto precedente è asintoticamente stabile.

   Il sistema non può essere asintoticamente stabile poichè è presente un polo nell'origine.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_3^3 + 1 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 - x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

1. Si determini uno stato di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u = \bar{u} = 1$.

   Gli eventuali stati di equilibrio soddisfano le equazioni:

$$\begin{cases} -\bar{x}_1 - \sin(\bar{x}_2) = 0 \\ -\bar{x}_3^3 + 1 = 0 \\ -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3 + \bar{u} = 0 \end{cases}$$

   Dalla seconda equazione si ricava $\bar{x}_3 = 1$. Le restanti due equazioni sono evidentemente soddisfatte ponendo $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$. Uno stato di equilibrio, non unico, è quindi il seguente:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 = 1 \end{cases}$$

2. Si scrivano le equazioni del sistema linearizzato nell'intorno dello stato di equilibrio determinato al punto precedente.

   Linearizzando equazione per equazione, si ottiene:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\delta x_1 - \cos(\bar{x}_2)\delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = -3\bar{x}_3^2\delta x_3 \\ \delta\dot{x}_3 = -\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 + \delta u \\ \delta y = \delta x_1 \end{cases}$$

   e quindi:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\delta x_1 - \delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = -3\delta x_3 \\ \delta\dot{x}_3 = -\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 + \delta u \\ \delta y = \delta x_1 \end{cases}$$

3. Si discuta la stabilità dello stato di equilibrio del sistema non lineare assegnato.

   La matrice $\mathbf{A}$ del sistema risulta:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   Valutiamo gli autovalori della matrice:

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2+\lambda+3)+3 = \lambda^3+2\lambda^2+4\lambda+6$$

   Applichiamo il criterio di Routh-Hurwitz al polinomio caratteristico, componendo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{lll} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & \\ 6 & & \end{array}$$

Poiché tutti gli elementi nella prima colonna sono concordi, tutte le radici del polinomio caratteristico del sistema linearizzato sono a parte reale negativa e quindi lo stato di equilibrio del sistema non lineare di partenza è asintoticamente stabile.

4. Si dia la definizione formale di stabilità secondo l'approccio di Lyapunov di uno stato di equilibrio.

   Uno stato di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ si dice stabile se, $\forall \epsilon > 0$, esiste in corrispondenza un $\delta_\epsilon > 0$ tale che, per ogni stato iniziale perturbato $\mathbf{x}_{0p}$ tale che $\|\mathbf{x}_{0p} - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta_\epsilon$, il corrispondente movimento perturbato $\mathbf{x}_p(t)$ soddisfi la condizione $\|\mathbf{x}_p(t) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon$, $\forall t > 0$.