Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Seconda prova scritta intermedia

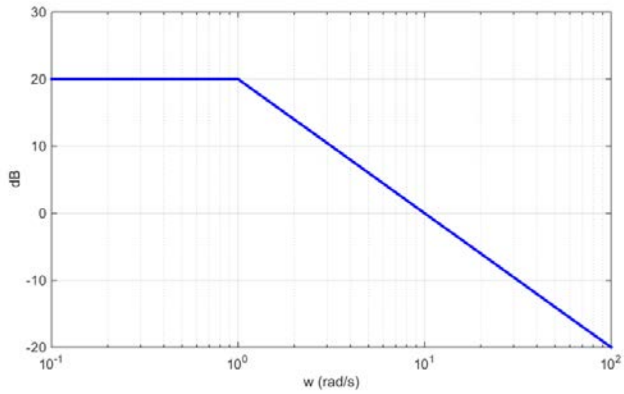
Anno accademico 2014/2015

29 Giugno 2015

Soluzioni

Esercizio 1

1.1



Il diagramma di Bode del modulo di L taglia l'asse a 0 dB approssimativamente alla pulsazione 10 rad/s.

Calcolo del margine di fase:

$$\varphi_c = -\arctan(10) - 2\arctan(10\tau) = -84° - 2\arctan(10\tau)$$
$$\Rightarrow \quad \varphi_m = 96° - 2\arctan(10\tau)$$

Imponendo che il margine di fase valga 20° si ottiene:

$$2\arctan(10\tau) = 76° \quad \Rightarrow \quad \tau = 0.1\tan(38°) = 0.078$$

1.2

Poiché il margine di fase è piccolo, è opportuno approssimare la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso con quella di un sistema del secondo ordine. Lo smorzamento ξ dei poli può essere valutato con la formula:

$$\xi = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) = 0.17$$

L'espressione della funzione di trasferimento è quindi:

$$F(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2} = \frac{100}{s^2 + 3.4s + 100}$$

Mentre il valore esatto assunto in ω_c è:

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\xi} = 2.88$$

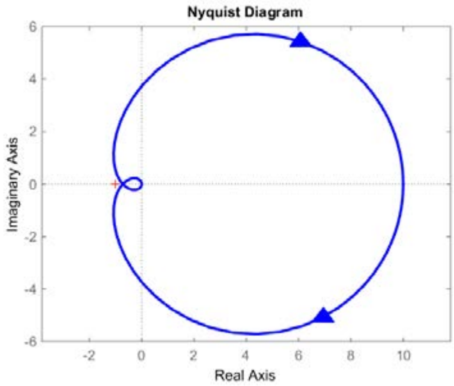
1.3

Tempo di assestamento al 99%: $\tau_{a1} = \dfrac{\ln(100)}{\xi\omega_c} = \dfrac{4.6}{0.17 \times 10} = 2.71$

Periodo delle oscillazioni: $T = \dfrac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi^2}} = 0.638$

1.4

Il diagramma polare di L si traccia facilmente tenendo conto che la fase passa da 0 a $-270°$. Di conseguenza si traccia il diagramma di Nyquist. Poiché il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, il diagramma non gira intorno al punto -1.



Esercizio 2

2.1

Poiché è richiesto un errore a transitorio esaurito finito ma non necessariamente nullo, è sufficiente che la funzione di trasferimento d'anello abbia tipo g_L nullo, e quindi che il regolatore abbia tipo nullo: $g_R = 0$.

In questo caso, l'errore dovuto al riferimento vale:

$$|e_\infty| = \frac{1}{\mu_R + 1} \le 0.15 \quad \Rightarrow \quad \mu_R \ge 5.66$$

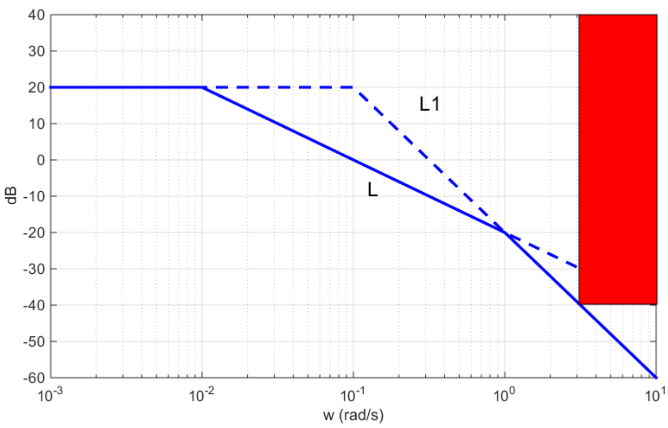
È opportuno scegliere μ_R=10. Pertanto: $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}} = 10.$

Il requisito di attenuazione del disturbo in linea di retroazione comporta che: $|L(j\omega)| \le -40\text{dB}, \quad \omega \ge 3$

Per il progetto dinamico, consideriamo la funzione di trasferimento:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = 10\frac{1-s}{(1+10s)^2}$$

Per il tracciamento del modulo di L si osservi che, supponendo $\omega_c = 0.1$, occorrerà introdurre un cambio di pendenza alla pulsazione 1 per garantire il vincolo di reiezione del disturbo.



Tenendo conto dello zero a parte reale positiva alla pulsazione 1, non cancellabile, la fase critica e il margine di fase valgono:

$$\varphi_c = -\arctan(10) - 3\arctan(0.1) = -84° - 3 \times 5.7°$$

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 180° - 101° = 79°$$

Le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = 10\frac{1-s}{(1+100s)(1+s)^2},$$

da cui si ottiene l'espressione della funzione di trasferimento del controllore:

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = 10\frac{(1+10s)^2}{(1+100s)(1+s)^2}.$$

2.2

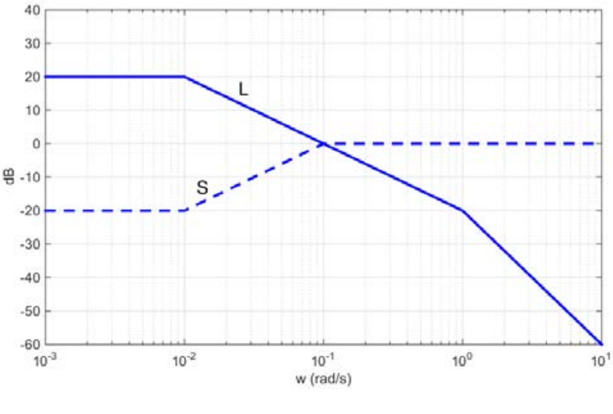
La funzione di sensitività è definita come:

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

Essa assume rilevanza nella reiezione dei disturbi in linea d'andata e nella valutazione delle prestazioni statiche rispetto al segnale di riferimento e a disturbi in linea d'andata.

2.3

Il diagramma del modulo di S si traccia con le consuete approssimazioni a partire da quello di L:



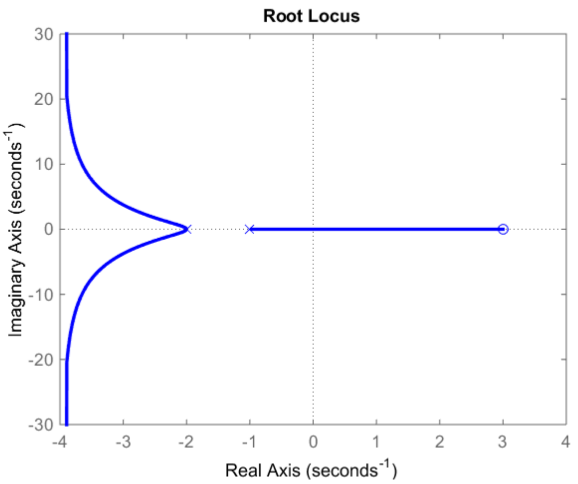
Esercizio 3

3.1

Risulta $m = 1$, $n = 3$, $z_1 = -3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2$. Vi sono quindi due asintoti, il cui punto di intersezione è:

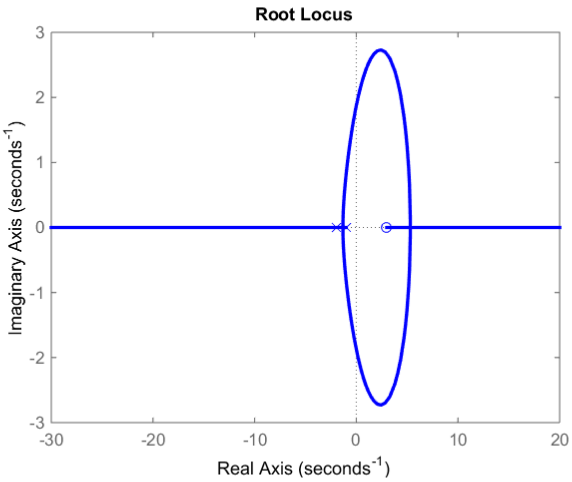
$$x_a = \frac{\sum z_i - \sum p_i}{n-m} = \frac{-3-(1+2+2)}{2} = -4$$

Il luogo diretto è tracciato in figura:



3.2

Il luogo inverso è tracciato in figura:



3.3

Nel luogo diretto è possibile punteggiare in $\bar{s} = 0$:

$$\rho_M = \frac{1 \times 2 \times 2}{3} = \frac{4}{3}$$

Poiché la somma delle parti reali dei poli si conserva e vale -5, si può punteggiare il luogo inverso nel punto $\bar{s} = -5$:

$$\rho_m = -\frac{3 \times 3 \times 4}{8} = -\frac{9}{2}$$

Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se: $-\frac{9}{2} < \rho < \frac{4}{3}$

3.4

Uno dei poli in anello chiuso può avere parte reale -3 in uno dei due casi:

1) Nel luogo diretto si possono avere due poli complessi coniugati a parte reale -3. In questo caso, poiché la somma delle parti reali dei poli vale sempre -5, il terzo polo sarà in $+1$ e quindi il sistema in anello chiuso sarà instabile;

2) Nel luogo inverso si può avere un polo reale nel punto -3. In questo caso, poiché punteggiando in tale punto si ottiene un valore di ρ compreso nell'intervallo determinato al punto precedente, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Esercizio 4

4.1

Risulta:

$$V(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}2^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(2z^{-1}\right)^k=\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{z}{z-2}$$

4.2

Risulta:

$$W(z)=-z\frac{dV(z)}{dz}=-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-2}\right)=-z\frac{z-2-z}{(z-2)^2}=\frac{2z}{(z-2)^2}$$

4.3

Risulta:

$$Y(z)=G(z)U(z)=\frac{z}{z^2-5z+6}\frac{z}{z-1}=\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

Sviluppiamo $Y(z)/z$:

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{\alpha_1}{z-1}+\frac{\alpha_2}{z-2}+\frac{\alpha_3}{z-3}=\frac{\alpha_1(z-2)(z-3)+\alpha_2(z-1)(z-3)+\alpha_3(z-1)(z-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

Imponendo l'uguaglianza dei numeratori per $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$,

$$\begin{cases}2\alpha_1=1\\-\alpha_2=2\\2\alpha_3=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=1/2\\\alpha_2=-2\\\alpha_3=3/2\end{cases}$$

Pertanto:

$$Y(z)=\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}-2\frac{z}{z-2}+\frac{3}{2}\frac{z}{z-3}$$

Antitrasformando:

$$y(k)=\frac{1}{2}-2\times 2^k+\frac{3}{2}3^k,\quad k\geq 0$$

4.4

Valore iniziale:

$$y(0)=\lim_{z\to\infty}Y(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}=0$$

coerentemente con la valutazione della precedente risposta per k=0.

Il teorema del valore finale non è invece applicabile.