Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Seconda prova scritta intermedia

Anno accademico 2011/2012

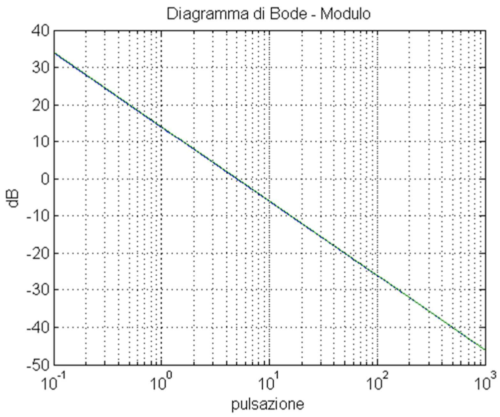
28 Giugno 2012

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

La funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ soddisfa le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode.



Dal diagramma di Bode del modulo si può quindi ricavare la pulsazione critica pari a 5 rad/s. Il margine di fase sarà quindi:

$$\varphi_m = 180^o - |-90^o - 2\mathrm{atan}(0.1 \cdot 5)| \cong 36.87^o$$

Per il criterio di Bode, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile poiché il guadagno d'anello ed il margine di fase sono entrambi positivi.

1.2

Poiché il margine di fase non è molto elevato, è opportuno approssimare il comportamento del sistema in anello chiuso con una coppia di poli dominanti complessi e coniugati caratterizzati da

$$\omega_n = 5\,rad/s \quad \text{e} \quad \xi = \frac{\varphi_m}{100} \cong 0.37$$

La funzione di sensitività complementare sarà quindi approssimabile con un sistema del secondo ordine con la seguente espressione

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{25}{s^2 + 3.7s + 25}$$

Da ciò segue immediatamente che

$$|F(j5)| = \frac{25}{|(j5)^2 + 3.7 \cdot j5 + 25|} = \frac{5}{3.7} \cong 1.35$$

1.3

Il tempo di assestamento al 99% e il periodo delle oscillazione della risposta allo scalino valgono rispettivamente:

$$T_{a1} = \frac{5}{\xi\omega_c} = \frac{5}{0.37 \cdot 5} = 2.7 \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{5} = 1.26$$

1.4

Avendo verificato che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, è possibile applicare il teorema del valore finale:

$$e_\infty = \lim_{t\to+\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\frac{2}{s} + \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\frac{5}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{s+5}2 + \lim_{s\to 0}\frac{s}{s+5}\frac{5}{s} = 0 + \lim_{s\to 0}\frac{5}{s+5} = 1$$

Esercizio 2

2.1

Poiché è richiesto un errore a transitorio esaurito finito ma non necessariamente nullo, è sufficiente che la funzione di trasferimento d'anello abbia tipo g_L pari ad 1. Poiché la funzione di trasferimento del processo ha tipo 1, è sufficiente che il regolatore abbia tipo nullo: $g_R = 0$.

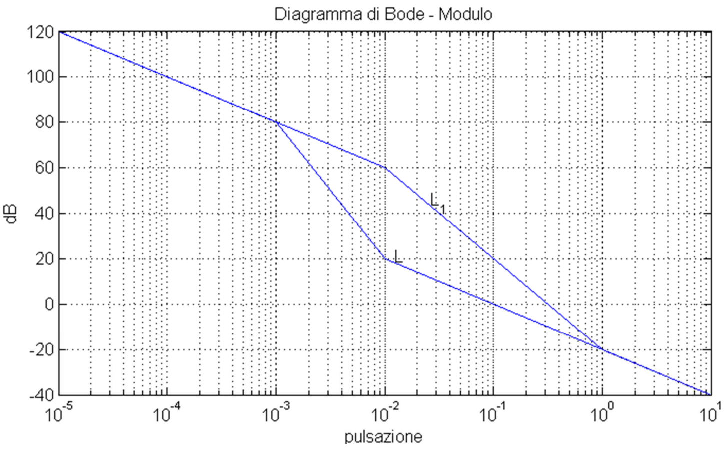
In questo caso, l'errore dovuto al riferimento è nullo, mentre quello dovuto al disturbo in linea di andata vale:

$$|e_\infty| = \frac{1}{\mu_R} \le 0.1 \quad \Rightarrow \quad \mu_R \ge 10$$

Pertanto: $R_1(s) = \dfrac{\mu_R}{s^{g_R}} = 10$.

Per il progetto dinamico, consideriamo la funzione di trasferimento:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+100s)}$$



Tracciandone il diagramma di Bode del modulo, ci si rende subito conto, a causa del taglio con pendenza -2, che il margine di fase è negativo o del tutto insufficiente. Si sceglie allora di tagliare alla pulsazione 0.1 con pendenza -1, raccordando il diagramma di $|L|$ a quello di $|L_1|$ in bassa frequenza alla pulsazione 0.001, introducendo due zeri in 0.01 e raccordando il diagramma di $|L|$ con quello di $|L_1|$, in alta frequenza, alla pulsazione 1.

Si ottiene:

$$\omega_c = 0.1 rad/s$$

$$\varphi_c = -90° + 2\arctan(10) - 2\arctan(100) = -100°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_m = 80°$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte, e risulta:

$$L(s) = \frac{10(1+100s)^2}{s(1+1000s)^2},$$

da cui:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)} = 10\frac{(1+100s)^3}{(1+s)(1+1000s)^2}.$$

2.2

Il sistema di controllo progettato è in grado di riprodurre sull'uscita le prime due armoniche, che hanno pulsazione inferiore alla pulsazione critica; non è invece in grado di riprodurre la terza armonica (a 10 rad/s) che, avendo pulsazione decisamente superiore alla pulsazione critica, verrà fortemente attenuata.

2.3

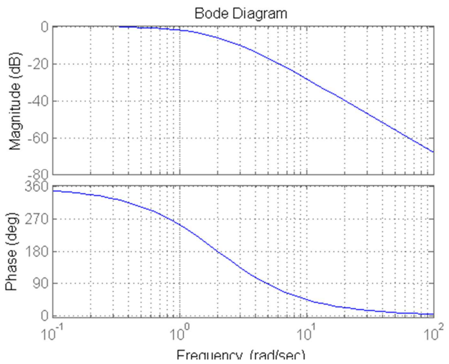
Deve risultare:

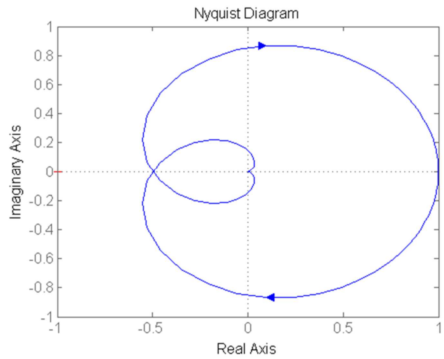
$$C(j15)G(j15)+H(j15)=0 \quad \Rightarrow \quad C(j15)=-\frac{H(j15)}{G(j15)}=-\frac{1+j3}{1+j15}\frac{j15(1+j1500)}{1+j15}=-\frac{22545+j67485}{224+j30}$$

Esercizio 3

3.1

Per il tracciamento del diagramma di Nyquist (per esempio per k = 1) ci si appoggia ai diagrammi di Bode associati a L:





3.2

Occorre caratterizzare il punto di intersezione del diagramma con il semiasse reale negativo:

$$\angle L(j\omega_\pi)=\angle(1-0.5j\omega_\pi)-3\angle(1+0.5j\omega_\pi)=-4\arctan(0.5\omega_\pi)=-180°$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(0.5\omega_\pi)=45° \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi=2\,rad/s$$

$$|L(j\omega_\pi)|=k\frac{|1-0.5j\omega_\pi|}{|1+0.5j\omega_\pi|^3}=\frac{k}{2}$$

Per l'asintotica stabilità secondo il criterio di Nyquist il diagramma di Nyquist non deve girare intorno al punto –1, il che è verificato se:

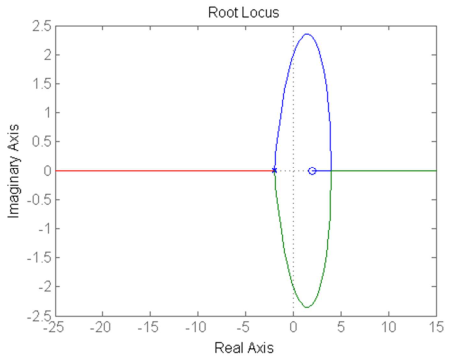
$$|L(j\omega_\pi)|<1 \quad \Rightarrow \quad k<2$$

3.3

La funzione di trasferimento d'anello può essere riscritta come:

$$L(s)=k\frac{-0.5(s-2)}{0.5^3(s+2)^3}=\rho\frac{s-2}{(s+2)^3}, \quad \rho=-4k<0$$

Occorre quindi tracciare il luogo inverso:



3.4

Il valore limite per l'asintotica stabilità si ottiene punteggiando in $s = -6$ (somma delle parti reali dei poli, che si conserva al variare di ρ):

$$\rho_m = -\frac{4\times4\times4}{8} = -8$$

Il sistema è quindi asintoticamente stabile per $\rho > -8$, ovvero per $k < 2$, coerentemente con quanto trovato al punto 3.2.

Esercizio 4

4.1

La trasformata Zeta del segnale $u(k) = 3^k$ si calcola come:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(3z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1-3z^{-1}} = \frac{z}{z-3}$$

4.2

Risulta:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{1}{z^2+5z+4}\frac{z}{z-3} = \frac{z}{(z+4)(z+1)(z-3)}$$

Sviluppiamo $Y(z)/z$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z+4)(z+1)(z-3)} = \frac{\alpha_1}{z+4} + \frac{\alpha_2}{z+1} + \frac{\alpha_3}{z-3} = \frac{\alpha_1(z+1)(z-3)+\alpha_2(z+4)(z-3)+\alpha_3(z+4)(z+1)}{(z+4)(z+1)(z-3)}$$

Imponendo l'uguaglianza dei numeratori per $z = -4$, $z = -1$, $z = 3$:

$$\begin{cases} 21\alpha_1 = 1 \\ -12\alpha_2 = 1 \\ 28\alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/21 \\ \alpha_2 = -1/12 \\ \alpha_3 = 1/28 \end{cases}$$

Pertanto:

$$Y(z) = \frac{1}{21}\frac{z}{z+4} - \frac{1}{12}\frac{z}{z+1} + \frac{1}{28}\frac{z}{z-3}$$

Antitrasformando:

$$y(k) = \frac{1}{21}(-4)^k - \frac{1}{12}(-1)^k + \frac{1}{28}3^k, \quad k \ge 0$$

4.3

Dall'espressione di $y(k)$:

$$y(0)=\frac{1}{21}-\frac{1}{12}+\frac{1}{28}=0$$

Dal teorema del valore iniziale:

$$y(0)=\lim_{z\to\infty}Y(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{(z+4)(z+1)(z-3)}=0$$

4.4

```
G = tf(1,[1 5 4],-1);
step(G)
```