Fondamenti di Automatica
Prof. Luca Bascetta

Primo prova intermedia
27 Aprile 2018

ESERCIZIO 1

E' assegnato il sistema dinamico, a tempo continuo, lineare e invariante con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

in cui

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

1. Si indichino i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui:

   (a) il sistema è asintoticamente stabile.
   Il polinomio caratteristico del sistema dinamico è $\chi(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - \alpha)$, esso ha quindi due autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \alpha$.
   Il sistema è quindi asintoticamente stabile per $\alpha < 0$.

   (b) il sistema ha uscita di equilibrio $y(t) = \bar{y} = 1$ in corrispondenza dell'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$.
   All'equilibrio le equazioni del sistema diventano

   $$\begin{aligned} &-\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0 \\ &\alpha\bar{x}_2 + 1 = 0 \\ &\bar{y} = \bar{x}_1 = 1 \end{aligned}$$

   Dalla prima equazione si ricava, quindi, $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 = 1$ e dalla seconda $\alpha = -1$.

   (c) il sistema ha funzione di trasferimento con due costanti di tempo $\tau_1 = 1$ s e $\tau_2 = 2$ s.
   Trasformando le equazioni del sistema a partire da stato iniziale nullo si ottiene

   $$\begin{aligned} &(s+1)\,X_1(s) = X_2(s) \\ &(s-\alpha)\,X_2(s) = U(s) \\ &Y(s) = X_1(s) \end{aligned}$$

   da cui si ricava la seguente funzione di trasferimento

   $$G(s) = \frac{1}{(s+1)\,(s-\alpha)} = \frac{-\alpha}{(1+s)\left(1 - \frac{1}{\alpha}s\right)}$$

   Le costanti di tempo sono quindi $\tau_1 = 1$ s e $\tau_2 = -\frac{1}{\alpha}$ s.
   Si conclude quindi che deve essere $\alpha = -0.5$.

   (d) il sistema è completamente raggiungibile.
   La matrice di raggiungibilità ha la seguente espressione

   $$K_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

   Il determinante di K_R è pari a -1 indipendentemente dal valore di α.
   Si conclude, quindi, che il sistema è completamente raggiungibile $\forall\alpha$.

(e) il sistema è completamente osservabile.
La matrice di osservabilità ha la seguente espressione

$$K_O = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il determinante di K_O è pari a 1 indipendentemente dal valore di α.
Si conclude, quindi, che il sistema è completamente osservabile $\forall \alpha$.

2. Posto $\alpha = -2$, si scriva l'espressione analitica dell'uscita forzata del sistema ($y(t) = \dots$) quando l'ingresso è $u(t) = sca(t)$.

Per $\alpha = -2$ la trasformata di Laplace dell'uscita ha la seguente espressione

$$Y(s) = \frac{1}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

e può essere decomposta, utilizzando il metodo di Heaviside, come segue

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{(s+1)} + \frac{\alpha_3}{(s+2)} = \frac{\alpha_1\,(s+1)\,(s+2) + \alpha_2 s\,(s+2) + \alpha_3 s\,(s+1)}{s\,(s+1)\,(s+2)}$$

Imponendo l'uguaglianza tra il precedente numeratore e il numeratore originale di $Y(s)$ per i valori $s = 0$, $s = -1$ e $s = -2$ si ottengono i seguenti valori dei parametri

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = -1 \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2}$$

La decomposizione di $Y(s)$ può essere quindi riscritta come segue

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)}$$

e, antitrasformando, si ricava

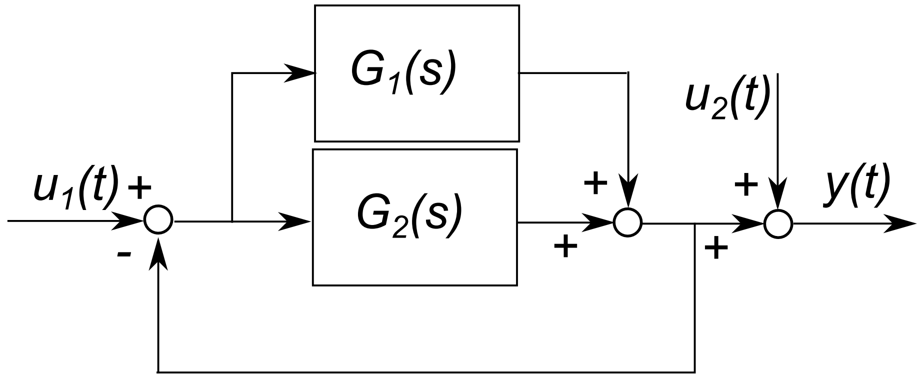
$$y(t) = 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

3. Sempre per $\alpha = -2$, si scrivano le istruzioni MATLAB per la definizione della rappresentazione di stato del sistema dinamico assegnato.

```
A=[-1, 1; 0, -2];
B=[0; 1];
C=[1, 0];
D=0;
sist=ss(A,B,C,D);
```

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico lineare e invariante descritto dallo schema a blocchi di figura.



1. Si determinino le funzioni di trasferimento da $u_1(t)$ a $y(t)$ e da $u_2(t)$ a $y(t)$.

   È possibile procedere utilizzando la sovrapposizione degli effetti.
   Posto $u_2(t) = 0$, è immediato verificare che lo schema a blocchi è costituito da una retroazione unitaria negativa la cui linea di andata è composta dal parallelo tra $G_1(s)$ e $G_2(s)$. La funzione di trasferimento da u_1 a y è quindi data da

   $$\frac{Y(s)}{U_1(s)} = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s)}$$

   Posto ora $u_1(t) = 0$, è immediato verificare che la funzione di trasferimento da u_2 a y è data da

   $$\frac{Y(s)}{U_2(s)} = 1$$

2. Posto $G_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + 0.7s + 1}$, si determini il valore di guadagno e tipo della funzione di trasferimento $G_1(s)$ oltre che di pulsazione naturale e smorzamento dei suoi poli.

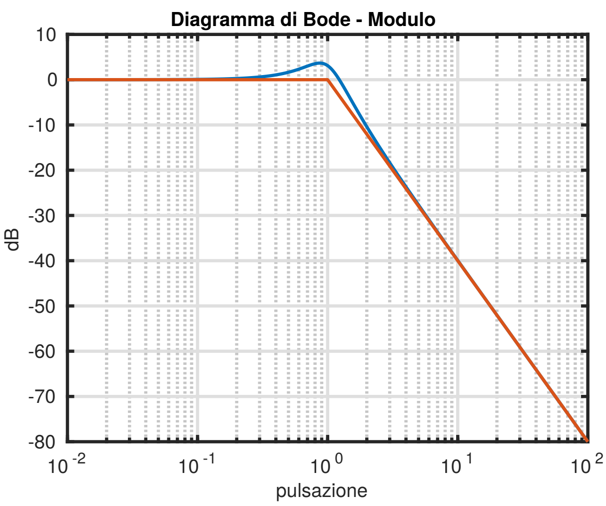
   Il guadagno della funzione di trasferimento è pari a 1, il tipo è pari a 0 (non ci sono poli o zeri in $s = 0$).
   Riscrivendo il polinomio a denominatore nella forma

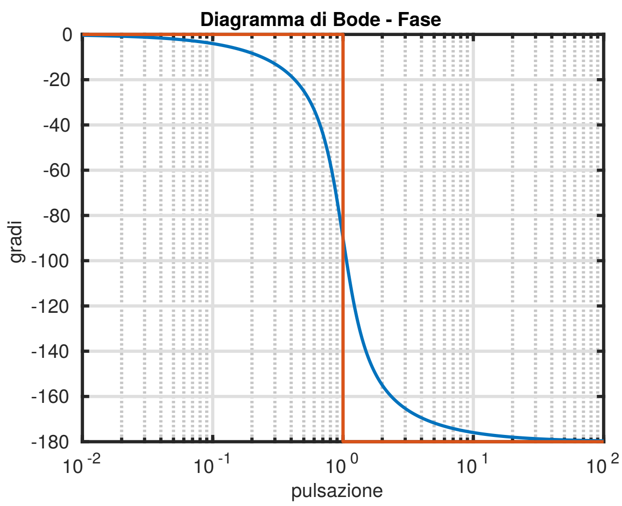
   $$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

   si ottiene $\omega_n = 1$ e $\xi = 0.35$.

3. Si traccino i diagrammi asintotici e reali (qualitativamente) di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a $G_1(s)$.

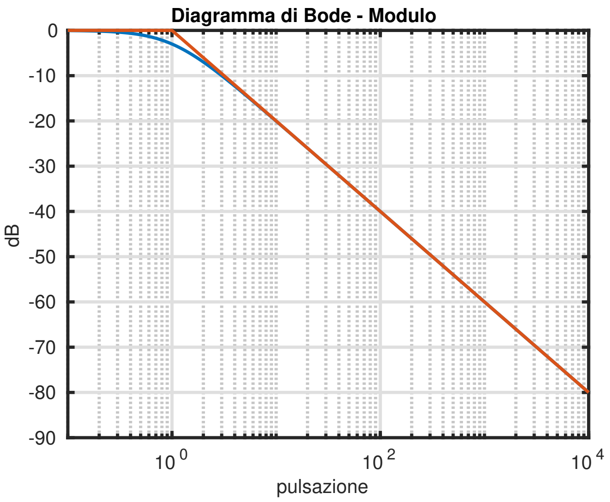
   I diagrammi di Bode asintotici e reali di $G_1(s)$ sono mostrati nelle figure sottostanti.





4. Posto $G_2(s) = \dfrac{1}{1+s}$, si caratterizzi il sistema dal punto di vista del suo comportamento in frequenza, quantificandone anche la banda passante. Si precisi, inoltre, a quale frequenza l'attenuazione esercitata da $G_2(s)$ (ovvero il fattore per cui viene ridotta l'ampiezza di una sinusoide in ingresso) è pari a $1/1000$.

   $G_2(s)$ è un filtro passa-basso con banda passante $BP = (-\infty, 1]$.
   Dal suo diagramma asintotico del modulo (vedi figura sottostante) si ricava che l'attentuazione è pari a $1/1000$ per una pulsazione di $1000\,\text{rad/s}$.



ESERCIZIO 3
Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo non lineare e invariante descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x^2(t) + u(t) \\ y(t) = x^3(t) + 2\sqrt{u(t)} \end{cases}$$

1. Si determini lo stato di equilibrio $\bar{x} > 0$ corrispondente all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$.

   All'equilibrio il sistema dinamico è descritto dalla seguente equazione

$$-\bar{x}^2 + 1 = 0$$

   L'unico stato di equilibrio positivo è quindi $\bar{x} = 1$.

2. Si scrivano le equazioni del sistema linearizzato nell'intorno dello stato di equilibrio determinato al punto precedente e, in base ad esso, se possibile, si caratterizzi l'equilibrio dal punto di vista della stabilità.

   Il sistema linearizzato nell'intorno del generico equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è descritto dalle seguenti equazioni

$$\delta\dot{x}(t) = -2\bar{x}\delta x(t) + \delta u(t)$$
$$\delta y(t) = 3\bar{x}^2\delta x(t) + \frac{2}{2\sqrt{\bar{u}}}\delta u(t)$$

   Sostituendo i valori dello stato e dell'ingresso di equilibrio si ricava

$$\delta\dot{x}(t) = -2\delta x(t) + \delta u(t)$$
$$\delta y(t) = 3\delta x(t) + \delta u(t)$$

   Poiché l'unico autovalore del sistema linearizzato é reale negativo, lo stato di equilibrio del sistema non lineare é asintoticamente stabile.

3. Si ricavi la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema linearizzato e se ne specifichi il guadagno.

   Trasformando secondo Laplace le equazioni del sistema linearizzato a partire da stato iniziale nullo si ricava

$$G(s) = \frac{s+5}{s+2}$$

   Il guadagno di $G(s)$ é $\mu = G(0) = \frac{5}{2}$.

4. Si tracci l'andamento qualitativo della risposta del sistema di funzione di trasferimento $G(s)$ a uno scalino unitario. Sullo stesso grafico si tracci la risposta a uno scalino unitario del sistema di funzione di trasferimento $\tilde{G}(s)$, che ha lo stesso diagramma di Bode del modulo di $G(s)$, guadagno positivo, è asintoticamente stabile, ma non a fase minima.

   La funzione di trasferimento $G(s)$ può essere riscritta nella forma guadagno-costanti di tempo come segue

$$G(s) = \frac{5}{2}\frac{1+0.2s}{1+0.5s}$$

   La funzione di trasferimento $\tilde{G}(s)$, che ha lo stesso diagramma di Bode del modulo di $G(s)$, guadagno positivo, è asintoticamente stabile, ma non a fase minima, ha la seguente espressione

$$\tilde{G}(s) = \frac{5}{2}\frac{1-0.2s}{1+0.5s}$$

   Le risposte allo scalino unitario di entrambi i sistemi sono mostrati nella figura seguente (in rosso la risposta di $G(s)$, in blu la risposta di $\tilde{G}(s)$.