Prima prova scritta intermedia 2009/2010
Soluzione

Bascetta

Esercizio 1

1.1

Scelti come stati x_1 e x_2 le tensioni sui condensatori e x_3 la corrente nell'induttore, si ricava

$$\begin{aligned} C\dot{x}_1 &= x_2 \\ L\dot{x}_2 &= u - x_1 - Rx_2 - x_3 \\ C\dot{x}_3 &= x_2 \\ y &= Rx_2 + x_3 \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{C}x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{L}x_3 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{C}x_2 \\ y &= Rx_2 + x_3 \end{aligned}$$

1.2

Con i valori dei parametri dati nel testo la matrice dinamica del sistema risulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & -1.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice è

$$\varphi(\lambda) = \lambda\left(\lambda^2 + 1.5\lambda + 1\right)$$

Tale matrice ha quindi un autovalore nullo e due autovalori reali negativi, si conclude quindi che il sistema è semplicemente stabile.

1.3

Con i valori dei parametri dati nel testo le matrici di raggiungibilità ed osservabilità del sistema risultano

$$K_R = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.75 \\ 0.5 & -0.75 & 0.625 \\ 0 & 0.5 & -0.75 \end{bmatrix} \quad \det(K_R) = 0$$

$$K_O = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 1.75 \\ 3 & -3.5 & 2.25 \\ 1 & -1.5 & 1.75 \end{bmatrix} \quad \det(K_O) = 2.75$$

Si conclude quindi che il sistema é completamente osservabile ma non completamente raggiungibile.
Il sistema non risulta completamente raggiungibile poichè i due stati x_1 e x_3 non sono tra loro indipendenti, ovvero non è possibile cambiare in modo arbitrario il loro valore agendo sull'ingresso u.

1.4

Con i valori dei parametri dati nel testo la funzione di trasferimento del sistema risulta

$$G(s) = \frac{1 + 3s}{2s^2 + 3s + 2}$$

Sebbene il sistema nello spazio di stato abbia ordine 3, la sua funzione di trasferimento ha denominatore di ordine 2 a causa della presenza di parti nascoste (non raggiungibili) che non si manifestano nel legame ingresso-uscita.

1.5

Il guadagno di $G(s)$ è pari a 0.5, il tipo pari a 0.
I poli hanno pulsazione naturale $1\,rad/s$ e smorzamento 3/4.

Esercizio 2

2.1

Utilizzando il criterio di Routh si ricavano le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \alpha > -11 \\ \alpha > 0 \\ \alpha^2 + 11\alpha + 10 > 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \alpha > -11 \\ \alpha > 0 \\ \alpha > -1, \alpha < -10 \end{cases}$$

Il sistema è quindi asintoticamente stabile per $\alpha > 0$.

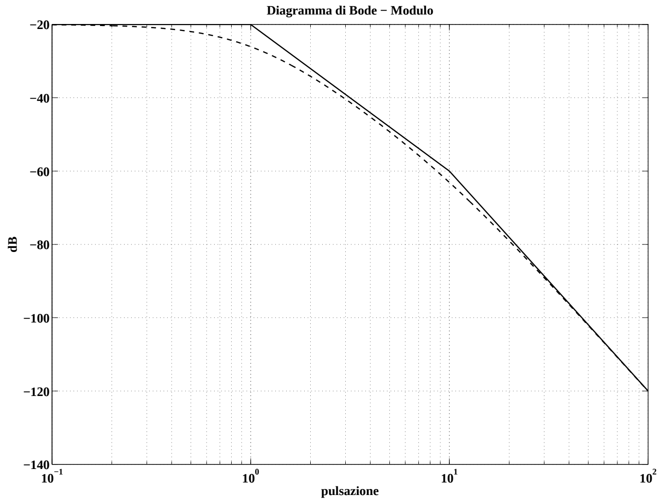

Figura 1: Diagramma di Bode del modulo di $G(s)$.

2.2

Applicando il metodo di Heaviside si perviene alla seguente risposta nel dominio delle trasformate di Laplace

$$Y(s) = \frac{1}{20s} - \frac{1}{9}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{16}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{720}\frac{1}{s+10}$$

Antitrasformando si ottiene la seguente espressione analitica

$$y(t) = \frac{1}{20} - \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{720}e^{-10t} \quad t \geq 0$$

2.3

I diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza di $G(s)$ sono riportati in Figura 1 e 2.

Esercizio 3

3.1

Lo stato e l'uscita di equilibrio si ricavano dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
&\bar{x}_1 e^{\bar{x}_2} + 2\bar{x}_2 - 2\bar{u} = 0 \\
&\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \ln \bar{u} = 0 \\
&\bar{y} = \bar{x}_1 e^{\bar{u}} + \bar{x}_2 \ln \bar{u}
\end{aligned}$$

la cui soluzione con $\bar{u} = 1$ è $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 1$, a cui corrisponde l'uscita $\bar{y} = 0$.

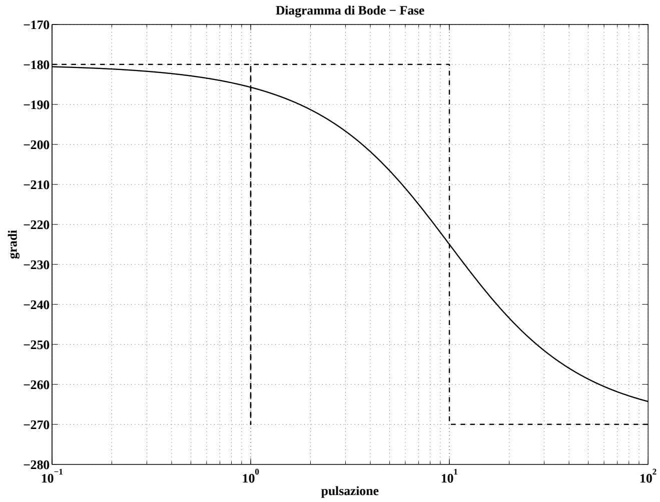

Figura 2: Diagramma di Bode della fase di $G(s)$.

3.2

Linearizzando il sistema si ricava

$$\begin{aligned}
\dot{\delta x}_1 &= e^{\bar{x}_2}\delta x_1 + \left(\bar{x}_1 e^{\bar{x}_2} + 2\right)\delta x_2 - 2\delta u \\
\dot{\delta x}_2 &= \delta x_1 + \ln \bar{u}\delta x_2 + \frac{\bar{x}_2}{\bar{u}}\delta u \\
\delta y &= e^{\bar{u}}\delta x_1 + \ln \bar{u}\delta x_2 + \left(\bar{x}_1 e^{\bar{u}} + \frac{\bar{x}_2}{\bar{u}}\right)\delta u
\end{aligned}$$

Nel punto di equilibrio $\bar{u} = 1$, $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\dot{\delta x}_1 &= e\delta x_1 + 2\delta x_2 - 2\delta u \\
\dot{\delta x}_2 &= \delta x_1 + \delta u \\
\delta y &= e\delta x_1 + \delta u
\end{aligned}$$

La matrice dinamica di tale sistema è

$$A = \begin{bmatrix} e & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ed ha un autovalore nel semipiano destro. L'equilibrio considerato è quindi instabile.

Esercizio 4

4.1

La funzione di trasferimento richiesta ha la seguente espressione

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)G_3(s)\left[1 + G_2(s)\right]}{1 - G_1(s)G_3(s)\left[1 + G_2(s)\right]} + G_4(s)$$

4.2

È necessario che $G_4(s)$, che si trova in parallelo a tutto il resto dello schema, sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema nel suo complesso.

4.3

Con le espressioni delle funzioni di trasferimento indicate nel testo si ricava

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{\left(s^2 + s - 4\right)\left(s + 3\right)}$$

Tale funzione di trasferimento ha due poli nel sempiano sinistro ed uno nel semipiano destro, il teorema della risposta in frequenza non è quindi applicabile.