Seconda prova scritta intermedia 2007/2008
Soluzione

Bascetta

Esercizio 1

1.1

Il sistema può essere scomposto in un anello a retroazione negativa – contenente le funzioni di trasferimento $R(s)$ e $G(s)$ in linea di andata, $T(s)$ e $1+H(s)$ in linea di retroazione – con in cascata la funzione di trasferimento $H(s)$. La funzione di trasferimento da u a y è quindi

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)T(s)\left(1 + H(s)\right)} H(s)$$

1.2

Come detto precedentemente il sistema complessivo è costituito dalla cascata di $H(s)$ e

$$\frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)T(s)\left(1 + H(s)\right)}$$

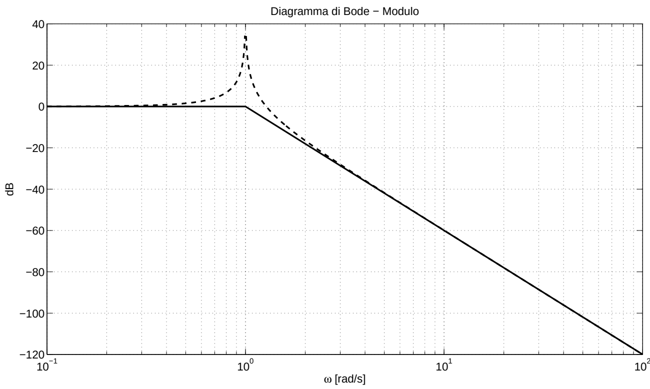
Si conclude quindi che eventuali conoscenze circa la asintotica stabilità di $R(s)$, $G(s)$ e $T(s)$ non servono a concludere nulla circa la asintotica stabilità del sistema complessivo, poichè tali funzioni di trasferimento fanno parte di un sistema retroazionato. Poichè $H(s)$, invece, è in serie a tale sistema retroazionato è necessario che essa sia asintoticamente stabile. Infine, l'asintotica stabilità di $H(s)$ non è sufficiente per garantire l'asintotica stabilità del sistema complessivo, poichè essa dipende anche dall'asintotica stabilità del sistema retroazionato.

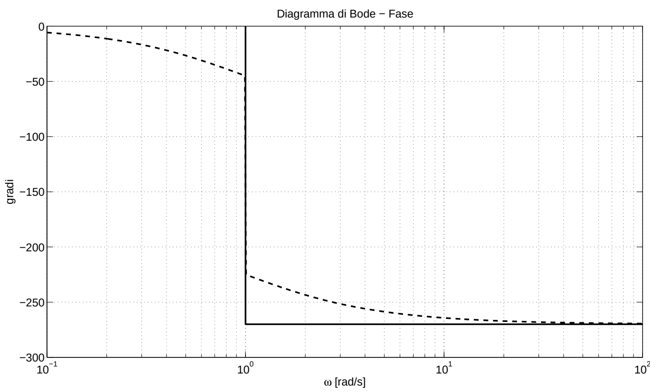
1.3

Si ricava

$$P(s) = \frac{\frac{5}{1+s}\frac{0.2}{s}}{1 + \frac{5}{1+s}\frac{0.2}{s}\left(1 + \frac{1}{s}\right)} \frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

Alla pulsazione $\omega = 1\,rad/s$ il sistema ha una coppia di poli a smorzamento





nullo, di conseguenza il diagramma di Bode del modulo presenta, a tale pulsazione, un picco di risonanza. Il modulo della funzione di trasferimento a quella pulsazione sarà dunque infinito.
Al contrario il diagramma di fase, nel caso di poli a smorzamento nullo, tende al diagramma asintotico, ovvero presenta un discontinuità di 180° in corrispondenza della pulsazione naturali dei poli.

1.4

Come detto precedentemente $P(s)$ presenta una coppia di poli sull'asse immaginario a pulsazione $\omega = 1\,rad/s$, non è quindi possibile utilizzare il teorema del valor finale per calcolare il valore asintotico dell'uscita.

Esercizio 2

2.1

Dai diagrammi di Bode presentati in figura si ricavano i seguenti dati:

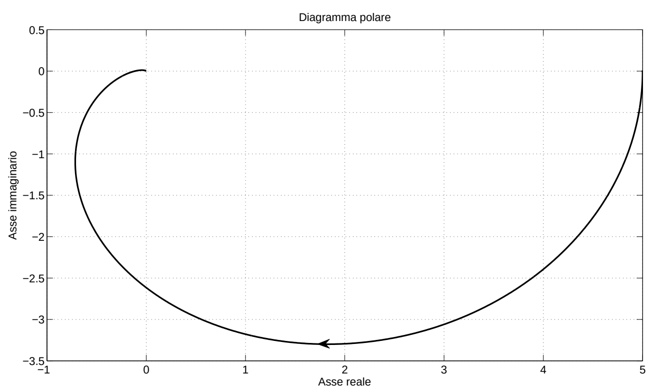
- pulsazione critica $2\,rad/s$;
- fase critica $-130°$;
- margine di fase $50°$;
- pulsazione ω_π $6\,rad/s$
- margine di guadagno $20\,dB$.

2.2

Poichè il margine di fase è inferiore a $60°$ possiamo approssimare i poli dominanti del sistema ad anello chiuso con una coppia di poli complessi e coniugati a pulsazione naturale $\omega_n = 2\,rad/s$ e smorzamento $\xi = 0.5$.
Il tempo di assestamento della risposta di y ad uno scalino di $y°$ sarà quindi

$$T_a = \frac{5}{\xi\omega_n} = 5\,s$$

2.3



Esercizio 3

3.1

Per ottenere errore finito a transitorio esaurito in risposta ad una variazione a scalino del riferimento è necessaria una funzione di trasferimento d'anello di tipo 1. Scegliamo pertanto $g_R = 1$ mentre il guadagno μ_R andrà fissato in fase di progetto dinamico, ovvero

$$R_1(s) = \frac{1}{s}$$

Per garantire l'attenuazione del disturbo $d(t)$ sull'uscita dovremo invece porre

$$\left| \frac{1}{1 + L(j\bar{\omega})} \right| \leq 1000 \quad \bar{\omega} \leq 0.001\, rad/s$$

Dalle specifiche si ricava che il disturbo $d(t)$ agisce a pulsazioni comprese nella banda dell'anello di controllo, potremo quindi semplificare il vincolo precedente come segue

$$\left| \frac{1}{L(j\bar{\omega})} \right| \leq 1000 \quad \bar{\omega} \leq 0.001\, rad/s$$

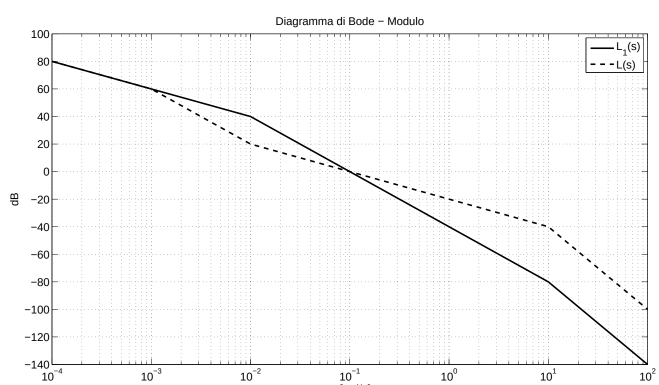
ovvero

$$|L(j\bar{\omega})|_{dB} \geq 60\, dB \quad \bar{\omega} \leq 0.001\, rad/s$$

Per il progetto dinamico consideriamo la funzione di trasferimento

$$L_1(s) = \frac{1}{s(1 + 100s)(1 + 0.1s)}$$

Si può facilmente verificare che il margine di fase che si ottiene con tale funzione di trasferimento d'anello è pari a circa 5°, non sufficiente per soddisfare le specifiche.
Si sceglie allora di tagliare alla pulsazione $0.1\, rad/s$ con pendenza -1, inserendo un polo a $0.001\, rad/s$ ed uno zero a $0.01\, rad/s$ (in bassa frequenza si garantisce quindi il raccordo con $L_1(s)$, anche se esso non è a rigore necessario, ed il soddisfacimento del vincolo per l'attenuazione del disturbo $d(t)$). In alta frequenza si inserisce poi un'ulteriore polo in $10\, rad/s$ in modo da mantenere paralleli i diagrammi di $|L(j\omega)|$ e $|L_1(j\omega)|$. Si ottiene



$$\omega_c \approx 0.1\, rad/s$$
$$\varphi_c = -90^\circ + \arctan(10) - \arctan(100) - 2\arctan(0.01) \approx -96.3^\circ$$
$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| \approx 84^\circ$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte. Risulta

$$L(s) = \frac{1+100s}{s(1+1000s)(1+0.1s)^2}$$

ed

$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{(1+100s)^2}{(1+1000s)(1+0.1s)}$$

da cui

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{(1+100s)^2}{s(1+1000s)(1+0.1s)}$$

3.2

Per garantire l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso è necessario che il guadano della funzione di trasferimento d'anello sia positivo. Se il processo ha guadagno negativo anche il regolatore dovrà avere guadagno negativo.
In questo caso il regolatore sarà quindi

$$R(s) = -\frac{(1+100s)^2}{s(1+1000s)(1+0.1s)}$$

3.3

Se il processo contiene un ritardo τ il margine di fase ottenuto nel punto 3.1 andrà modificato come segue

$$\varphi_m = 84^\circ - 0.1\tau\frac{180^\circ}{\pi}$$

Per garantire l'asintotica stabilità del sistema ad anello chiuso dovrà essere $\varphi_m > 0$, ovvero

$$84^\circ - 0.1\tau\frac{180^\circ}{\pi} > 0$$

da cui si ricava

$$\tau < \frac{84^\circ}{180^\circ}10\pi = 14.67\, s$$

Il massimo valore di τ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile è quindi $14.67\, s$.