

Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Seconda prova scritta intermedia

Anno accademico 2013/2014

30 Giugno 2014

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Il diagramma di Bode del modulo di L taglia l'asse a 0 dB approssimativamente alla pulsazione 0.3 rad/s.

Calcolo del margine di fase:

$$\varphi_c = -2 \arctan\left(\frac{0.3}{0.1}\right) - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} = -2 \times 71.5^\circ - 0.3 \times 57.3^\circ \approx -160^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi_m = 20^\circ$$

In base al criterio di Bode il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

1.2

Poiché il margine di fase è piccolo, è opportuno approssimare la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso con quella di un sistema del secondo ordine. Lo smorzamento ξ dei poli può essere valutato con la formula:

$$\xi = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) = 0.17$$

$$\text{Tempo di assestamento al 99\%: } \tau_{a1} = \frac{\ln(100)}{\xi \omega_c} = \frac{4.6}{0.17 \times 0.3} = 90.2$$

1.3

La funzione di trasferimento d'anello risulta:

$$L(s) = \frac{\mu}{(1+10s)^4}$$

Il diagramma polare di L si traccia facilmente tenendo conto che la fase passa da 0 a -360° . Di conseguenza si traccia il diagramma di Nyquist (in figura è tracciato per $\mu = 10$).

1.4

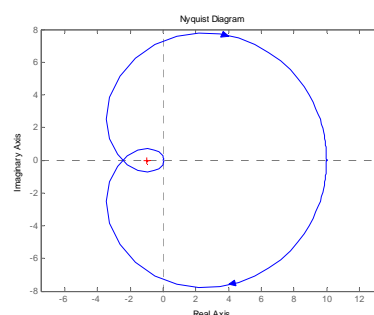
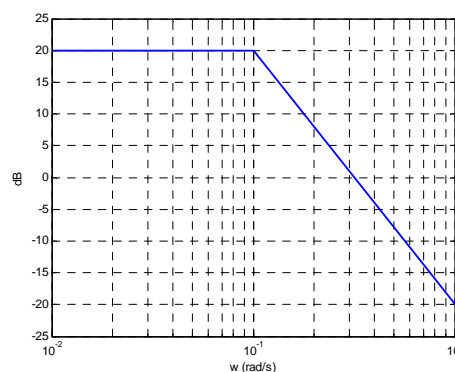
Occorre determinare dapprima la pulsazione per cui la fase di L vale -180° :

$$\angle L(j\omega_\pi) = \angle \frac{\mu}{(1+10j\omega_\pi)^4} = -4 \angle(1+10j\omega_\pi) = -4 \arctan(10\omega_\pi) = -180^\circ \Rightarrow \arctan(10\omega_\pi) = 45^\circ \Rightarrow \omega_\pi = 0.1$$

Si procede quindi al calcolo del modulo di L a tale pulsazione:

$$|L(j\omega_\pi)| = \left| \frac{\mu}{(1+10j\omega_\pi)^4} \right| = \frac{\mu}{|1+10j\omega_\pi|^4} = \frac{\mu}{|1+j|^4} = \frac{\mu}{\sqrt{2}^4} = \frac{\mu}{4}$$

Per il criterio di Nyquist il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist non compie giri intorno al punto -1 , il che avviene per $\mu < 4$.



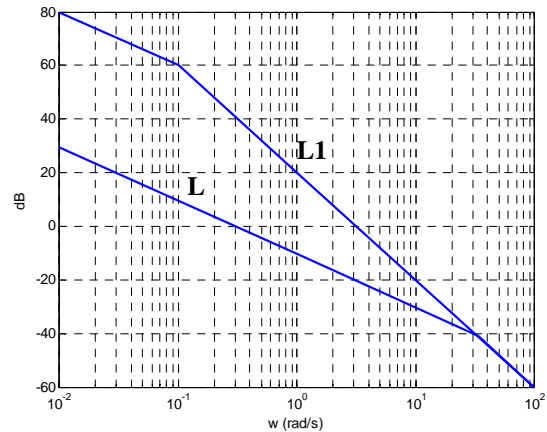
Esercizio 2

2.1

Poiché $G(s)$ è di tipo 1, l'errore a transitorio esaurito prodotto da un riferimento a scalino è nullo anche per regolatore di tipo zero, qualunque sia il guadagno del regolatore. Formalmente potremo porre:

$$R_1(s)=1 \Rightarrow L_1(s)=R_1(s)G(s)=G(s).$$

Il tracciamento del diagramma del modulo di L_1 evidenzia che occorre procedere al progetto dinamico per soddisfare i requisiti sul margine di fase. Tracciato il modulo di L come in figura, si ottiene $\omega_c = 0.3$, mentre la fase critica e il margine di fase valgono:



$$\varphi_c = -90^\circ - 2 \times \arctan(0.3) - \arctan(0.01) = -90^\circ - 2 \times 16.7^\circ - 0.5^\circ = -124^\circ$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$$

(si osservi il contributo della coppia zero-polo alla pulsazione 1).

Le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = \frac{0.3}{s} \frac{1-s}{(1+0.03s)(1+s)},$$

da cui si ottiene l'espressione della funzione di trasferimento, del primo ordine:

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = 0.003 \frac{1+10s}{1+0.03s}.$$

2.2

A regime l'uscita forzata da n risulta:

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega)),$$

con $H(s) = -L(s)/(1+L(s))$. Occorre quindi determinare l'insieme delle pulsazioni per cui risulta:

$$|H(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \approx |L(j\omega)| \leq \frac{1}{100} \Rightarrow |L(j\omega)|_{dB} \leq -40dB,$$

dove l'approssimazione è valida per valori di pulsazione decisamente maggiori della pulsazione critica. Per ispezione del grafico l'intervallo dei valori è dato da $\omega > 30$ rad/s.

2.3

Si può determinare il tempo di campionamento facendo in modo che la pulsazione di Nyquist sia decisamente superiore alla pulsazione critica. Tenendo conto della necessità di inserire un filtro anti-aliasing, si possono separare le due pulsazioni di due decadi:

$$\Omega_N = 100\omega_c = 30 \Rightarrow T = \frac{\pi}{30} \approx 0.1.$$

2.4

Il filtro anti-aliasing deve avere guadagno unitario, tagliare dopo ω_c ma prima di Ω_N . Una scelta possibile è quindi:

$$F_a(s) = \frac{1}{1+s/3} = \frac{1}{1+0.33s}$$

Esercizio 3

3.1

La funzione di trasferimento d'anello si può riscrivere nel modo seguente:

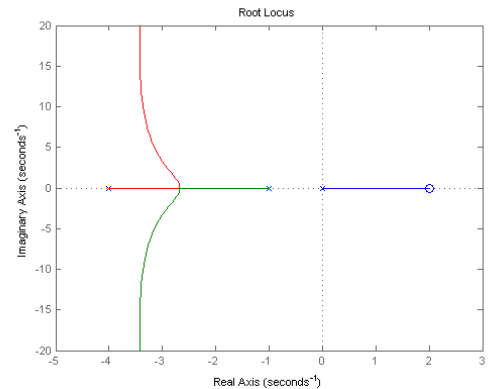
$$L(s) = \rho \frac{s-2}{s(s+1)(s+4)}$$

dove $\rho = -2k$.

Risulta $m = 1, n = 3, z_1 = -2, p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 4$. Vi sono quindi due asintoti, il cui punto di intersezione è:

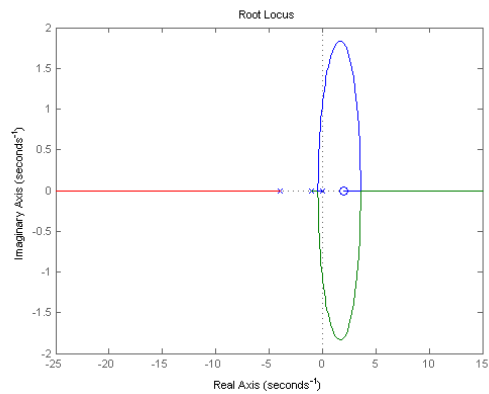
$$x_a = \frac{\sum z_i - \sum p_i}{n - m} = \frac{-2 - (1 + 0 + 4)}{2} = -\frac{7}{2}$$

Il luogo diretto è tracciato in figura:



3.2

Il luogo inverso è tracciato in figura:



3.3

Nel luogo diretto non esistono valori di ρ (e di conseguenza non esistono valori di k) per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile

Poiché la somma delle parti reali dei poli si conserva e vale -5 , si può punteggiare il luogo inverso nel punto $\bar{s} = -5$:

$$\rho_m = -\frac{1 \times 4 \times 5}{7} = -\frac{20}{7}$$

Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se: $-\frac{20}{7} < \rho < 0 \Rightarrow 0 < k < \frac{10}{7}$

3.4

Il polinomio caratteristico in anello chiuso è il seguente:

$$\chi(s) = k(1 - 0.5s) + s(1 + s)(1 + 0.25s) = 0.25s^3 + 1.25s^2 + (1 - 0.5k)s + k = 0.25(s^3 + 5s^2 + 2(2 - k)s + 4k)$$

Applicando il criterio di Routh

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2(2-k) & 0 \\ 5 & 4k & 0 \\ -2 \frac{7k-10}{5} & 0 & \end{array}$$

Il sistema è asintoticamente stabile per $0 < k < \frac{10}{7}$.

Esercizio 4

4.1

Il sistema ha due poli reali $z_1 = -2$ e $z_2 = \frac{1}{2}$.

Essendo uno dei poli a modulo maggiore di 1, il sistema è instabile.

4.2

Risulta:

$$Y(z) = G(z)U(z) = 2 \frac{z-1}{2z^2+3z-2} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1/2)(z+2)}$$

Sviluppiamo $Y(z)/z$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1/2)(z+2)} = \frac{\alpha_1}{z-1/2} + \frac{\alpha_2}{z+2} = \frac{\alpha_1(z+2) + \alpha_2(z-1/2)}{(z+2)(z-1/2)}$$

Imponendo l'uguaglianza dei numeratori per $z = 1/2$, $z = -2$:

$$\begin{cases} 5/2 \alpha_1 = 1 \\ -5/2 \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2/5 \\ \alpha_2 = -2/5 \end{cases}$$

Pertanto:

$$Y(z) = \frac{2}{5} \frac{z}{z-1/2} - \frac{2}{5} \frac{z}{z+2}$$

Antitrasformando:

$$y(k) = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{2}{5} (-2)^k, \quad k \geq 0$$

4.3

```
G = 2*tf([1 -1],[2 3 -2],-1);
```

```
step(G)
```

4.4

La risposta in frequenza del sistema per $\vartheta = 1$ ha la seguente espressione:

$$G(e^j) = 2 \frac{e^j - 1}{2e^{j^2} + 3e^j - 2}$$