Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Prima prova scritta intermedia

Anno accademico 2011/2012

2 Maggio 2012

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

La connessione in cascata dei due sistemi implica che l'uscita del primo coincida con l'ingresso del secondo. Eliminando quindi la variabile *w* si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = 0.5x_1 + 0.5x_2 - x_3 \\ y = x_3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0$$

1.2

La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathbf{K}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{K}_R) = 0$$

La matrice di osservabilità è:

$$\mathbf{K}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & \mathbf{A}^{T^2}\mathbf{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{K}_O) = -0.5$$

Il sistema è quindi completamente osservabile ma non completamente raggiungibile.

1.3

La funzione di trasferimento del sistema A si ottiene trasformando secondo Laplace le singole equazioni:

$$\begin{cases} sX_1 = -2X_1 + X_2 + 2U \\ sX_2 = X_1 \\ W = 0.5X_1 + 0.5X_2 \end{cases} \Rightarrow s^2X_2 = -2sX_2 + X_2 + 2U \Rightarrow X_2 = \frac{2}{s^2 + 2s - 1}U \Rightarrow X_1 = \frac{2s}{s^2 + 2s - 1}U$$

Pertanto:

$$A(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s - 1}$$

La funzione di trasferimento del sistema B è immediata:

$$B(s) = \frac{1}{s+1}$$

La funzione di trasferimento risultante dalla connessione in cascata dei precedenti risulta quindi:

$$A(s)B(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 1}$$

1.4

Poiché il sistema A è instabile, lo è anche il sistema complessivo.

Esercizio 2

2.1

La risposta in frequenza è la funzione $G(j\omega)$, per $\omega \geq 0$.

La definizione si applica a qualsiasi sistema dinamico lineare tempo invariante.

2.2

Poiché la funzione di trasferimento non ha né zeri, né poli, in s = 0 il tipo è nullo.

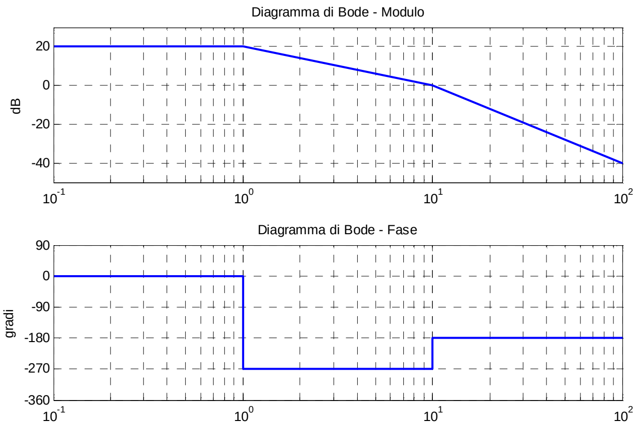
Il guadagno vale:

$$\mu = G(0) = 100\frac{-1}{1(-10)} = 10$$

2.3

La funzione di trasferimento può essere riscritta nella forma:

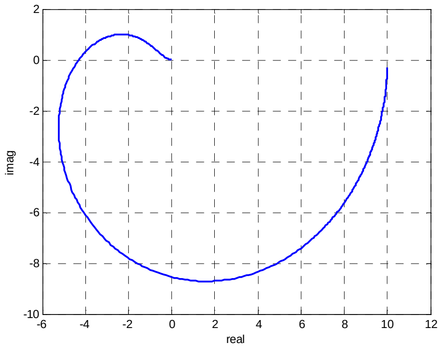
$$G(s) = 10\frac{1-s}{(1+s)^2(1-0.1s)}$$



La funzione di trasferimento ha tipo zero, guadagno pari a 10, due poli nel semipiano sinistro e uno zero nel semipiano destro alla pulsazione 1 e un polo nel semipiano destro alla pulsazione 10. I diagrammi asintotici sono riportati a fianco.

2.4

Il diagramma polare si ricava facilmente dai diagrammi di Bode asintotici (si osservi che la fase asintoticamente vale $-180°$).



Esercizio 3

3.1

Gli stati di equilibrio (valori di x che annullano la derivata) sono evidentemente $\bar{x}_1 = 3$, $\bar{x}_2 = 2$.

3.2

Linearizzando il sistema si ha:

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = -[(\bar{x}-2)+(\bar{x}-3)]\delta x + \delta u \\ \delta y = \delta x + 2\delta u \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta\dot{x} = (5-2\bar{x})\delta x + \delta u \\ \delta y = \delta x + 2\delta u \end{cases}$$

In $\bar{x}_1$:

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = -\delta x + \delta u \\ \delta y = \delta x + 2\delta u \end{cases}$$

e lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile (l'unico autovalore del sistema linearizzato è in $s = -1$).

In $\bar{x}_2$:

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = \delta x + \delta u \\ \delta y = \delta x + 2\delta u \end{cases}$$

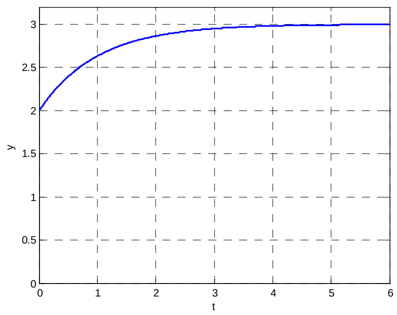
e lo stato di equilibrio è instabile (l'unico autovalore del sistema linearizzato è in $s = +1$).

3.3

In $\bar{x}_1$:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + 2 = \frac{2s+3}{s+1} = \mu\frac{1+s\tau}{1+sT}, \quad \mu = 3, T = 1, \tau = 2/3.$$

La risposta allo scalino si traccia con l'abituale costruzione grafica:



3.4

In $\bar{x}_2$:

$$G(s) = \frac{1}{s-1} + 2 = \frac{2s-1}{s-1}$$

La risposta allo scalino ha trasformata:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{2s-1}{s(s-1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}$$

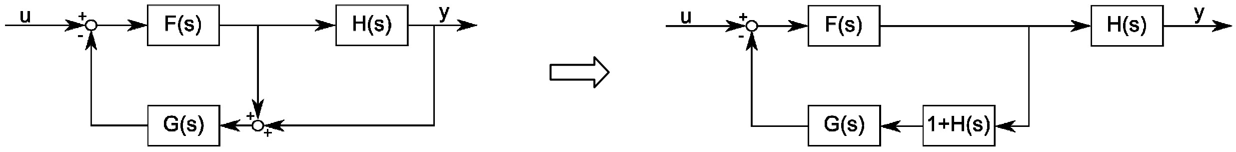
Pertanto l'antitrasformata è:

$$y(t) = 1 + e^t, \quad t \geq 0$$

Esercizio 4

4.1

Con $K(s)$ = 0, lo schema a blocchi è equivalente al seguente:



La funzione di trasferimento è quindi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{F(s)}{1+F(s)G(s)(1+H(s))}H(s)$$

4.2

Effettuando le sostituzioni:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\frac{1}{s}\frac{1}{s+5}}{1+\frac{1}{s}\frac{\alpha}{s+3}\left(1+\frac{1}{s+5}\right)}=\frac{s+3}{s(s+3)(s+5)+\alpha(s+6)}=\frac{s+3}{s^3+8s^2+(\alpha+15)s+6\alpha}$$

Occorre studiare la stabilità con il criterio di Routh:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \alpha+15 & 0 \\ 8 & 6\alpha & 0 \\ \frac{\alpha+60}{40} & 0 & \\ 6\alpha & & \end{array}$$

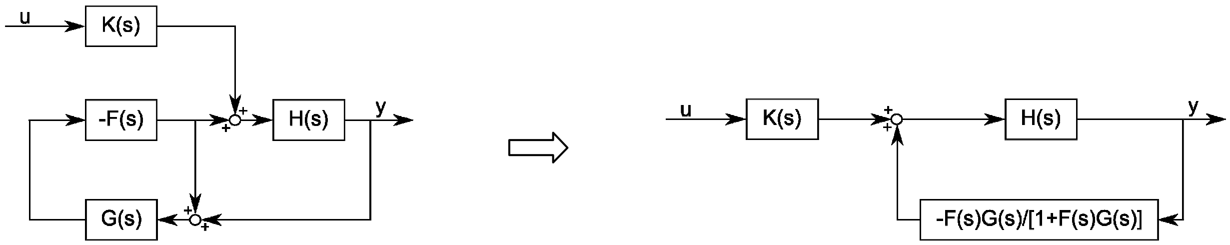
Affinché tutti gli elementi della prima colonna della tabella siano positivi, deve risultare $\alpha > 0$.

4.3

Per $\alpha = -1$ il sistema è instabile e il valore finale non può essere calcolato.

4.4

Per $K(s)$ generica si può considerare il seguente schema a blocchi e procedere per sovrapposizione degli effetti:



$$\frac{Y(s)}{U(s)}=K(s)\frac{H(s)}{1+\frac{F(s)G(s)H(s)}{1+F(s)G(s)}}+\frac{H(s)F(s)}{1+G(s)F(s)(1+H(s))}=H(s)\frac{F(s)+K(s)[1+F(s)G(s)]}{1+G(s)F(s)(1+H(s))}$$