Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Prima prova scritta intermedia - 3 Maggio 2016

Anno accademico 2015/2016

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Il sistema è descritto dalle matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}$ è:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 2 & \lambda + 2\alpha \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2\alpha)^2$$

Il sistema ha quindi un autovalore nell'origine e due autovalori in -2α.

Non esistono quindi valori di α per cui il sistema è asintoticamente stabile.

1.2

La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathbf{K}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4\alpha - 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{K}_R) = -4\alpha + 4\alpha - 1 = -1$$

Il sistema è quindi completamente raggiungibile per ogni valore di α.

1.3

La matrice di osservabilità è:

$$\boldsymbol{K}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{A}^{T^2}\boldsymbol{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\boldsymbol{K}_O) = 0$$

Il sistema è quindi non completamente osservabile per ogni valore di α.

1.4

Trasformando le equazioni del sistema partendo da stato iniziale nullo è possibile ricavare, con semplici conti algebrici, l'espressione della funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

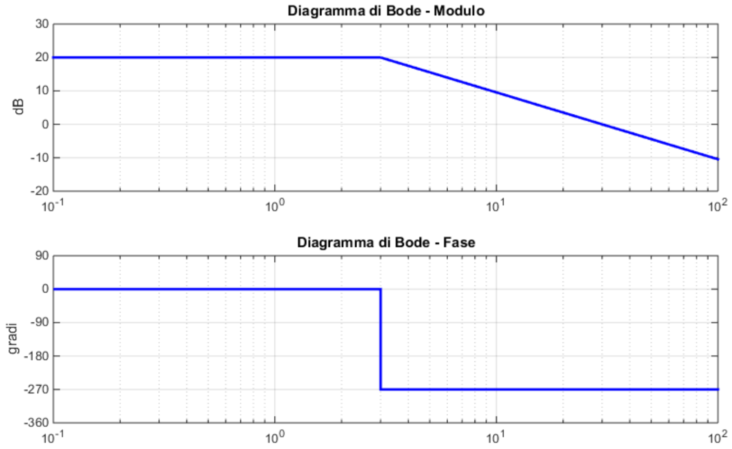
Il risultato ottenuto è coerente con quanto visto nei punti 1.2 e 1.3. Ci si attenderebbe infatti una funzione di trasferimento con denominatore di ordine 3, mentre il denominatore ha grado 1, ad indicare che esistono delle dinamiche nascoste dovute alla non completa osservabilità.

Esercizio 2

2.1

La funzione di trasferimento può essere riscritta come:

$$G(s)=10\frac{1-0.33s}{(1+0.33s)^2}\,.$$

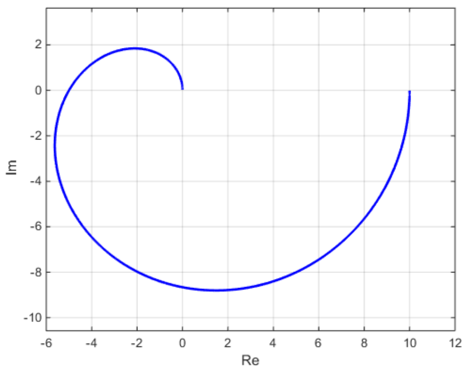


La funzione di trasferimento ha tipo zero, guadagno pari a 10, due poli nel semipiano sinistro e uno zero nel semipiano destro alla pulsazione 3.

I diagrammi asintotici sono riportati a fianco:

2.2

Il diagramma polare si ricava dai diagrammi di Bode asintotici:



2.3

La pulsazione alla quale il diagramma attraversa il semiasse immaginario negativo è quella per cui la fase vale –90°:

$$\angle G(j\overline{\omega})=-3\angle(1+0.33\,j\overline{\omega})=-3\arctan(0.33\overline{\omega})=-90° \quad\Rightarrow\quad \overline{\omega}=3\tan(30°)=\sqrt{3}$$

2.4

La trasformata di Laplace della risposta all'impulso coincide con la funzione di trasferimento:

$$Y(s)=G(s)=30\frac{3-s}{(3+s)^2}$$

Si utilizza il metodo di Heaviside:

$$Y(s)=30\frac{3-s}{(3+s)^2}=\frac{\alpha_1}{(s+3)^2}+\frac{\alpha_2}{s+3}=\frac{\alpha_2 s+\alpha_1+3\alpha_2}{(s+3)^2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\alpha_1=180\\ \alpha_2=-30\end{cases}$$

Pertanto:

$$Y(s)=\frac{180}{(s+3)^2}-\frac{30}{s+3} \quad\Rightarrow\quad y(t)=180te^{-3t}-30e^{-3t}, \quad t\geq 0$$

Esercizio 3

3.1

Gli stati di equilibrio si ottengono risolvendo le equazioni:

$$\begin{cases} -\bar{x}_1 + 2 = 0 \\ \bar{x}_2^2 + \bar{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 2 \\ \bar{x}_2 = \pm 1 \end{cases}$$

In corrispondenza si ha:

$$\bar{y} = \bar{x}_2^2 = 1$$

3.2

Linearizzando il sistema si ha:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\delta x_1 \\ \delta\dot{x}_2 = 4\bar{x}_2\delta x_2 - 2\delta u \end{cases}$$
$$\delta y = 2\bar{x}_2\delta x_2$$

In corrispondenza dell'equilibrio $\bar{x} = [2 \quad 1]^T$ risulta

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\delta x_1 \\ \delta\dot{x}_2 = 4\delta x_2 - 2\delta u \end{cases}$$
$$\delta y = 2\delta x_2$$

le cui matrici sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = [0 \quad 2], \quad \mathbf{D} = 0$$

Avendo un autovalore reale positivo, il sistema linearizzato è instabile e lo è anche lo stato di equilibrio del sistema di partenza.

In corrispondenza dell'equilibrio $\bar{x} = [2 \quad -1]^T$ risulta

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\delta x_1 \\ \delta\dot{x}_2 = -4\delta x_2 - 2\delta u \end{cases}$$
$$\delta y = -2\delta x_2$$

le cui matrici sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = [0 \quad -2], \quad \mathbf{D} = 0$$

Avendo due autovalori reale negativi, il sistema linearizzato è asintoticamente stabile e lo è anche lo stato di equilibrio del sistema di partenza.

3.3

Per calcolare la risposta all'ingresso $u(t) = \bar{u} + 0.1sca(t)$ a partire dallo stato di equilibrio $\bar{x} = [2 \quad -1]^T$ è possibile utilizzare il sistema linearizzato determinato in corrispondenza di tale equilibrio, la cui funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{4}{s+4}$$

La risposta allo scalino di ampiezza 0.1 è quindi data da

$$Y(s) = \frac{4}{s+4}\frac{0.1}{s} = \frac{0.1}{s} - \frac{0.1}{s+4}$$

Da cui si ricava

$$\delta y(t) = 0.1\left(1 - e^{-4t}\right) \qquad t \geq 0$$

e

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t) = 1 + 0.1\left(1 - e^{-4t}\right) \qquad t \geq 0$$

3.4

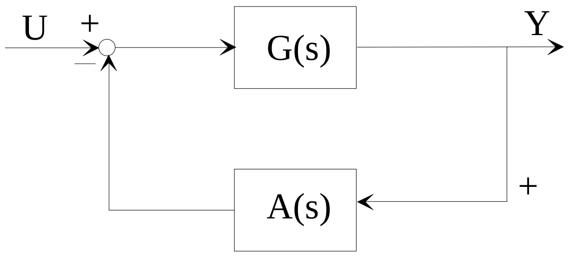
Le istruzioni MATLAB riferite, per esempio, al sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ sono le seguenti:

```
A = [-1,0;0,-4];
B = [0;-2];
C = [0,-2];
sist = ss(A,B,C,0);
step(sist)
impulse(sist)
```

Esercizio 4

4.1

Elaborando lo schema a blocchi si ottiene:



con:

$$A(s)=\frac{H(s)}{1+H(s)}=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}=\frac{1}{1+s}$$

Pertanto:

$$F(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)A(s)}=\frac{\frac{\alpha}{(1+s)^2}}{1+\frac{\alpha}{(1+s)^3}}=\frac{\alpha(1+s)}{(1+s)^3+\alpha}=\frac{\alpha(s+1)}{s^3+3s^2+3s+1+\alpha}$$

4.2

Occorre applicare il criterio di Routh al denominatore della funzione di trasferimento:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1+\alpha & 0 \\ \frac{8-\alpha}{3} & 0 & \\ 1+\alpha & & \end{array}$$

Il sistema è quindi asintoticamente stabile per:

$$\begin{cases} 8-\alpha>0 \\ 1+\alpha>0 \end{cases} \Rightarrow \quad -1<\alpha<8$$

4.3

Con α = 1, risulta:

$$F(s)=\frac{s+1}{s^3+3s^2+3s+2}$$

Il tipo della funzione di trasferimento è 0, il guadagno 1/2.

4.4

Per α = 1 con il teorema del valore iniziale si ha:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}[sY(s)]=\lim_{s\to\infty}s\frac{s+1}{s^3+3s^2+3s+2}\frac{1}{s}=0$$

Poiché il sistema è asintoticamente stabile, si può applicare il teorema del valore finale:

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}[sY(s)]=\lim_{s\to 0}s\frac{s+1}{s^3+3s^2+3s+2}\frac{1}{s}=\frac{1}{2}$$