Fondamenti di automatica

(Prof. Bascetta)

Anno accademico 2015/2016

Appello del 23 Settembre 2016

Cognome:..

Nome: ....

Matricola:.............................

Firma:.......................................

Avvertenze:

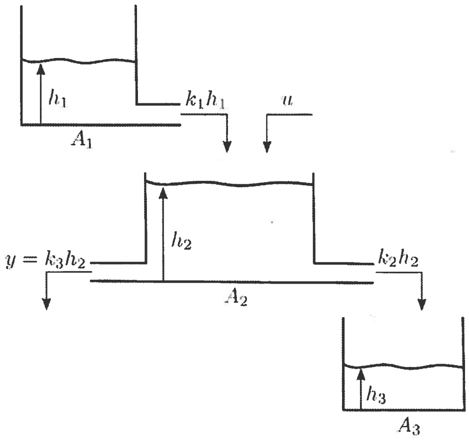
- Il presente fascicolo si compone di **8** pagine (compresa la copertina). Tutte le pagine utilizzate vanno firmate.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula per nessun motivo se non consegnando il compito o ritirandosi.
- Nei primi 30 minuti della prova non è consentito ritirarsi.
- Durante la prova non è consentito consultare libri o appunti di alcun genere.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici con display grafico.
- Le risposte vanno fornite **esclusivamente negli spazi** predisposti. Solo in caso di correzioni o se lo spazio non è risultato sufficiente, utilizzare l'ultima pagina del fascicolo.
- La chiarezza e l'**ordine** delle risposte costituiranno elemento di giudizio.
- Al termine della prova va consegnato **solo il presente fascicolo**. Ogni altro foglio eventualmente consegnato non sarà preso in considerazione.

Soluzione

Utilizzare questa pagina SOLO in caso di correzioni o se lo spazio a disposizione per qualche domanda non è risultato sufficiente

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema di serbatoi



dove $A_1 = A_3 = 0.5$, $A_2 = 1$ e $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

1.1 Si determinino le euqazioni del sistema dinamico che descrive il sistema di serbatoi.

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1 = -k_1 h_1 \\ A_2 \dot{h}_2 = u + k_1 h_1 - k_3 h_2 - k_2 h_2 \\ A_3 \dot{h}_3 = k_2 h_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u \\ \dot{x}_3 = 2x_2 \end{cases}$$

$$y = k_3 h_2 \qquad y = x_2$$

1.2 Si valuti se il sistema è raggiungibile.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \det K_o = 0 \quad \text{non compl. ragg.}$$

1.3 Si valuti se il sistema è osservabile.

$$A^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{T2} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad K_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det K_o = 0$$

non compl. oss.

1.4 Si fornisca un'interpretazione fisica dei risultati precedenti. Se il sistema risultasse non completamente raggiungibile e/o non completamente osservabile, si dica quali serbatoi rappresentano la parte non raggiungibile e/o la parte non osservabile.

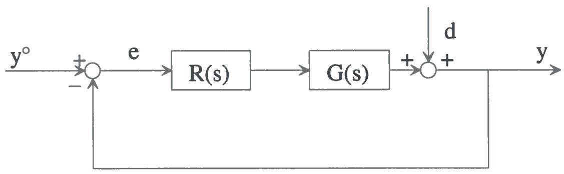
Agendo dall'ingresso u non è possibile variare la quantità di fluido contenuta nel serbatoio 1.

Misurando y non è possibile avere informazioni sulla quantità di fluido contenuta nel serbatoio 3.

Il serbatoio 1 rappresenta la parte non ragg.,
il serbatoio 3 la parte non oss.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema di controllo:



dove $G(s)=\frac{10}{s}\frac{1-0.1s}{1+0.1s}$.

2.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore, di ordine non superiore a 2, in modo tale che:

- l'errore a transitorio esaurito sia nullo quando $y°(t) = 5\mathrm{sca}(t)$, in assenza del disturbo d;
- un disturbo $d(t)=D\sin(0.01t)$, con D ampiezza arbitraria, sia attenuato sull'uscita y di un fattore almeno pari a 1000;
- il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale di 70°;
- la pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale di 1 rad/s.

Progetto statico

$$e_{\infty y^\circ} = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{1}{1+L(s)}\,\frac{5}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{5}{1+\frac{10\mu_R}{s^{g_R+1}}} = \lim_{s\to 0} \frac{5 s^{g_R+1}}{s^{g_R+1}+10\mu_R}$$

$$= 0 \qquad g_R = 0,\ \forall \mu_R$$

$$\boxed{R_1(s) = 1}$$

$$y_{\infty d}(t) = D\left|\frac{1}{1+L(j0.01)}\right| \sin(0.01t + \dots)$$

$$\left|\frac{1}{1+L(j0.01)}\right| \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow \boxed{|L(j0.01)| \geq 1000 = 60\,dB}$$

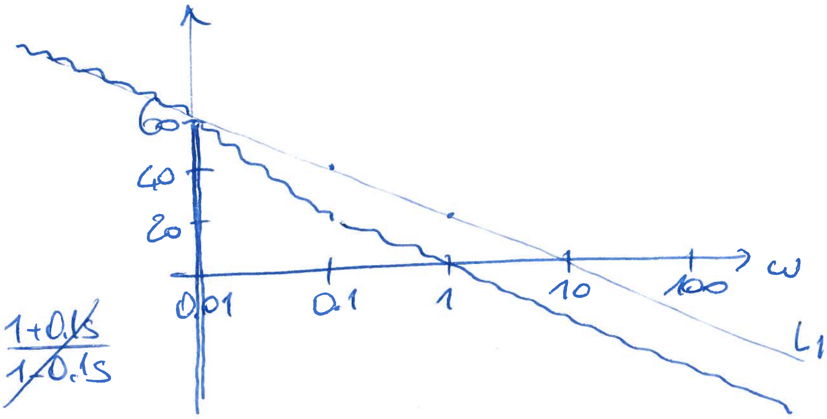
Progetto dinamico

$$L_1(s) = \frac{10}{s}\,\frac{1-0.1s}{1+0.1s}$$

$$L(s) = \frac{10}{s}\,\frac{(1+10s)(1-0.1s)}{(1+100s)(1+0.1s)}$$

$$R(s) = \frac{\cancel{10}}{\cancel{s}}\,\frac{(1+10s)\cancel{(1-0.1s)}}{(1+100s)\cancel{(1+0.1s)}}\,\frac{\cancel{s}}{\cancel{10}}\,\frac{\cancel{1+0.1s}}{\cancel{1-0.1s}}$$

$$= \frac{1+10s}{1+100s}$$



$\omega_c \simeq 1$ rad/s

$\varphi_c = -90° - \mathrm{atan}(100) - \mathrm{atan}(0.1)$
$+\,\mathrm{atan}(10) - \mathrm{atan}(0.1) \simeq -106.$

$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| \simeq 73.5°$

2.2 Si definisca il margine di guadagno e si dica in quali casi un sistema ha margine di guadagno infinito.

Il margine di guadagno si definisce come

$k_m = \dfrac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$ dove $\omega_\pi : \measuredangle L(j\omega_\pi) = -180°$

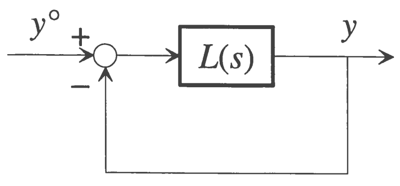
Si dice che k_m è ∞ quando $\nexists\, \omega_\pi : \measuredangle L(j\omega_\pi) = -180°$

2.3 Si spieghi, motivando la risposta, se al sistema del punto 2.1 è applicabile il metodo di taratura di Ziegler e Nichols in anello chiuso.

Sì, perché $k_m \neq \infty$

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema di controllo:

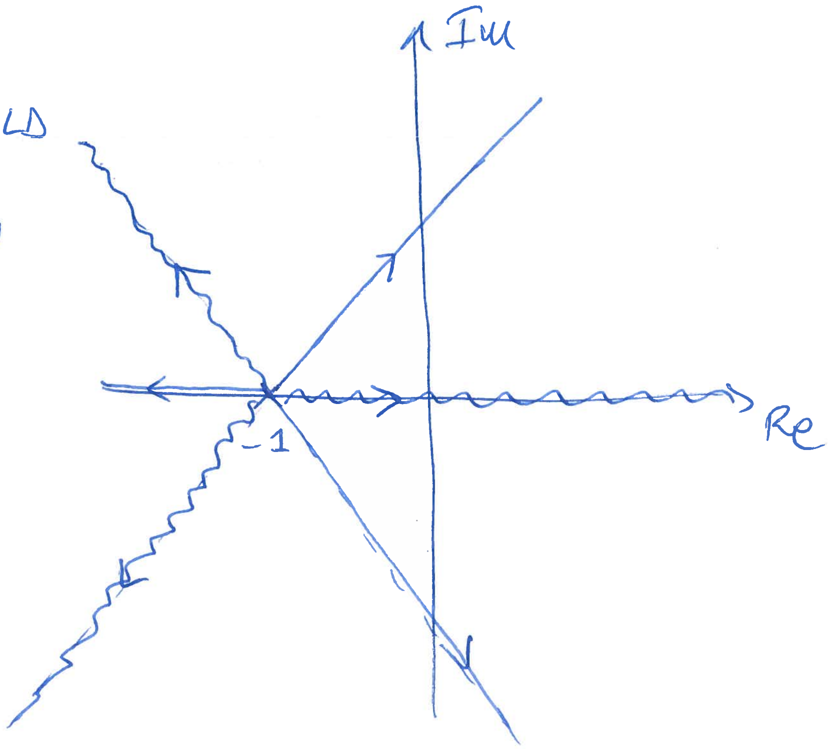


in cui $L(s)=\dfrac{\rho}{(s+1)^3}$.

3.1 Si traccino il luogo delle radici diretto e inverso.

$$x_a = \frac{0-(1+1+1)}{3} = -1$$

$$\vartheta_a = \begin{cases} 60° + h\,120° = 60°, 180°, 300° \text{ LD} \\ h\,120° = 0°, 120°, 240° \text{ LI} \end{cases}$$



3.2 Si determini l'insieme dei valori di ρ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

LI $\quad \bar{s} = 0 \quad |\rho_{min}| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

LD $\quad$ baricentro -3

$\bar{s} = -3 \quad \rho_{max} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$$\boxed{-1 < \rho < 8}$$

3.3 Si mostri che per $\rho = 8$ uno dei poli del sistema in anello chiuso è reale e vale *-3*, mentre gli altri due poli sono complessi e coniugati e valgono $\pm i\sqrt{3}$.

Per $\rho = 8$

- per la regola del baricentro un polo è in -8
- due poli sono complessi e coniugati. Poichè i rami coincidono con gli asintoti e formano un angolo con l'asse reale pari a $60°$ e $-60°$, le intersezioni con l'asse immaginario sono a $\pm i \tan 60° = \pm i\sqrt{3}$

Esercizio 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{z^2 - 2z - 3}{z^2}$$

4.1 Si discuta la stabilità del sistema.

$z_{1,2} = 0 \qquad |z_i| < 1 \Rightarrow$ sist. as. stabile

4.2 Si determinino i primi quattro campioni della risposta di $G(z)$ all'impulso unitario.

$$\begin{array}{l|l} z^2 - 2z - 3 & z^2 \\ \hline -z^2 & 1 - 2z^{-1} - 3z^{-2} \\ \hline \quad -2z - 3 & \\ \quad 2z & \\ \hline \qquad -3 & \\ \qquad 3 & \\ \hline \end{array}$$

$y_0 = 1$

$y_1 = -2$

$y_3 = -3$

$y_4 = 0$

4.3 Si scriva l'equazione alle differenze nel dominio del tempo imposta tra l'ingresso u e l'uscita y dalla funzione di trasferimento del presente esercizio (ovvero la relazione tra, da una parte, $y(k)$ e, dall'altra, i valori precedenti di y e i valori attuale e precedenti di u).

$$G(z) = 1 - 2z^{-1} - 3z^{-2}$$

$$y_k = u_k - 2u_{k-1} - 3u_{k-2}$$

4.4 Si mostri che in un sistema dinamico a tempo discreto di funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{z^n}$$

la risposta all'impulso è nulla per tutti i tempi $k > n$.

$$y_k = a_n u_k + a_{n-1} u_{k-1} + \cdots + a_1 u_{k-n+1} + a_0 u_{k-n}$$

Se $u_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

$y_0 = a_n$

$y_1 = a_{n-1}$

$\vdots$

$y_{n-1} = a_1$

$y_n = a_0$

$y_{n+1} = 0$

$\vdots$