Prima prova scritta intermedia 2006/2007
Soluzione

Bascetta

Esercizio 1

1.1

Detta x_1 la corrente nell'induttore e x_2 la tensione sul condensatore, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{u - x_2}{R} & = & x_1 + C\dot{x}_2 \\ L\dot{x}_1 & = & x_2 \\ y & = & x_2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & \dfrac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -\dfrac{1}{C}x_1 - \dfrac{1}{RC}x_2 + \dfrac{1}{RC}u \\ y & = & x_2 \end{cases}$$

1.2

Trasformando le equazioni del sistema a partire da stato iniziale nullo si ottiene

$$\begin{aligned} sLX_1(s) &= X_2(s) \\ sRCX_2(s) &= U(s) - X_2(s) - RX_1(s) = U(s) - \left(1 + \frac{R}{sL}\right) X_2(s) \\ Y(s) &= X_2(s) \end{aligned}$$

ovvero

$$G(s) = \frac{Ls}{RLCs^2 + Ls + R} = \frac{1}{RC} \frac{s}{s^2 + \dfrac{1}{RC}s + \dfrac{1}{LC}}$$

1.3

Il sistema considerato è di ordine 2 e, per esso, la condizione necessaria è anche sufficiente. Poiché i coefficienti del denominatore sono tutti positivi, essendo R, L, C positivi per ipotesi, il sistema è asintoticamente stabile.

1.4

Poiché $G(0) = 0$ il guadagno statico del sistema è nullo. All'equilibrio, infatti, la caduta di tensione sull'induttore sarà nulla, e sarà quindi nulla anche la caduta di tensione sul condensatore che si trova in parallelo a tale induttore.

Esercizio 2

2.1

La funzione di trasferimento è del tipo

$$G(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{1 + sT}$$

Dal valore di regime della risposta si deduce che $\mu = -1$ (lo scalino ha ampiezza 2), dalla durata del transitorio $T = 1$, dal valore iniziale della risposta si ha

$$2\mu \frac{\tau}{T} = 6 \quad \Rightarrow \quad \tau = -3$$

Pertanto

$$G(s) = \frac{3s - 1}{1 + s}$$

2.2

La funzione di trasferimento può essere scritta come

$$G(s) = -\frac{4}{1 + s} + 3$$

mettendo in evidenza la presenza di un legame diretto ingresso-uscita.
La risposta all'impulso sarà quindi

$$Y(s) = G(s) = -\frac{4}{1 + s} + 3$$

ovvero

$$y(t) = -4e^{-t}\,\mathrm{sca}(t) + 3\,\mathrm{imp}(t)$$

2.3

Ricavando la funzione di trasferimento in termini dei parametri a, b, c, d si ottiene

$$G(s) = \frac{cb}{s - a} + d$$

Per confronto con l'espressione ricavata al punto precedente si ottiene

$$a = -1 \quad bc = -4 \quad d = 3$$

Preso per esempio $b = 1$ si avrà $c = -4$.

Esercizio 3

3.1

Gli stati di equilibrio (valori di x che annullano la derivata) si ricavano dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} 0 = \bar{u}\,(\sqrt{\bar{x}_1} - 1) \\ 0 = -\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2\bar{u}^2 \end{cases}$$

La soluzione del sistema con $\bar{u} = 1$ è $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 0.5$.

3.2

Linearizzando il sistema si ha

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 & = & \dfrac{\bar{u}}{2\sqrt{\bar{x}_1}}\delta x_1 + (\sqrt{\bar{x}_1} - 1)\,\delta u \\ \delta\dot{x}_1 & = & -\delta x_1 + 2\bar{u}^2\delta x_2 + 4\bar{x}_2\bar{u}\delta u \\ \delta y & = & \bar{x}_2\delta x_1 + \bar{x}_1\delta x_2 + \delta u \end{cases}$$

Nel punto di equilibrio precedentemente calcolato

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 & = & 0.5\delta x_1 \\ \delta\dot{x}_1 & = & -\delta x_1 + 2\delta x_2 + 2\delta u \\ \delta y & = & 0.5\delta x_1 + \delta x_2 + \delta u \end{cases}$$

3.3

La matrice dinamica del sistema linearizzato è

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Poiché i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale il sistema è instabile.

3.4

Con ingresso nullo si ottiene il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & 0 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 \\ y & = & x_1 x_2 \end{cases}$$

Integrando tali equazioni si ricava

$$\begin{cases} x_1(t) & = & x_{10} \\ x_2(t) & = & x_{20} - x_{10}t \\ y & = & x_{10}\,(x_{20} - x_{10}t) \end{cases}$$

con $x_{10} = x_1(0)$, $x_{20} = x_2(0)$.
Consideriamo ora un nuovo stato iniziale $x'_1(0) = \alpha x_{10}$, $x'_2(0) = \alpha x_{20}$, a partire da esso avremo i movimenti

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'_1(t) & = & \alpha x_{10} = \alpha x_1(t) \\ x'_2(t) & = & \alpha x_{20} - \alpha x_{10} t = \alpha x_2(t) \\ y'(t) & = & \alpha x_{10} \left(\alpha x_{20} - \alpha x_{10} t \right) = \alpha^2 y(t) \end{array} \right.$$

Come si osserva dall'ultima equazione, per il sistema considerato non vale il principio di sovrapposizione degli effetti.