Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Seconda prova scritta intermedia

Anno accademico 2010/2011

30 Giugno 2011

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

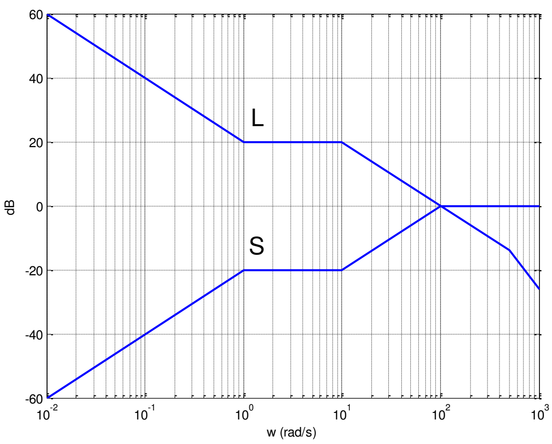
La funzione di sensitività è definite come:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

Assume rilievo nella determinazione delle prestazioni statiche del sistema di controllo (essendo la funzione di trasferimento dal riferimento all'errore) e nella valutazione dell'attenuazione dei disturbi in linea d'andata (essendo la funzione di trasferimento tra tali disturbi e la variabile controllata *y*).

1.2

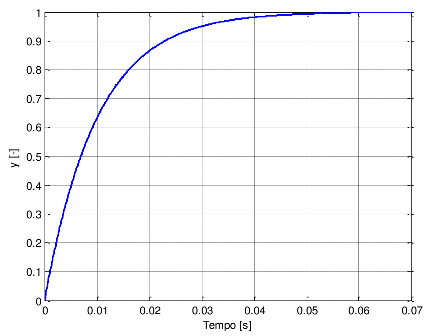
Il diagramma di Bode del modulo di *S* si traccia a partire da quello di *L*, ribaltandolo rispetto all'asse delle pulsazioni, fino alla pulsazione critica, dopo la quale si sovrappone all'asse delle pulsazioni:



1.3

La pulsazione critica vale ωc = 100 e il margine di fase è molto elevato poiché *L*, a fase minima, ha diagramma di Bode del modulo che taglia l'asse a 0 dB con un tratto molto ampio di pendenza −20 dB/decade. Pertanto vale l'approssimazione del primo ordine per la funzione di sensitività complementare, ovvero:

$$F(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + 0.01s}$$



la cui risposta allo scalino unitario si traccia facilmente.

1.4

Poiché $|S(0.1j)|_{dB} \cong -40$

il disturbo è attenuato sull'uscita *y* di un fattore pari a 100.

Esercizio 2

2.1

Poiché è richiesto un errore a transitorio esaurito finito ma non necessariamente nullo, è sufficiente che la funzione di trasferimento d'anello abbia tipo g_L nullo, e quindi anche che il regolatore abbia tipo nullo: $g_R = 0$.

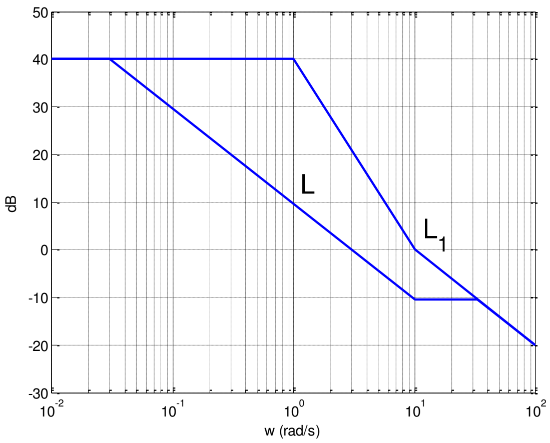
In questo caso, l'errore vale:

$$|e_\infty| = \frac{10}{1+\mu_R} \le 0.15 \quad \Rightarrow \quad 10 \le 0.15 + 0.15\mu_R \quad \Rightarrow \quad \mu_R \ge 65.6$$

È opportuno scegliere μ_R=100. Pertanto: $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}} = 100.$

Per il progetto statico, consideriamo la funzione di trasferimento:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = 100\frac{1-0.1s}{(1+s)^2}$$



Tracciandone il diagramma di Bode del modulo, ci si rende subito conto, per la presenza dello zero nel semipiano destro alla pulsazione 10, che il margine di fase è negativo o del tutto insufficiente. Si sceglie allora di tagliare alla pulsazione 3 con pendenza -1, raccordando il diagramma di $|L|$ a quello di $|L_1|$ in bassa frequenza, mantenendo lo zero alla pulsazione 10, e raccordando il diagramma di $|L|$ con quello di $|L_1|$ alla pulsazione 30.

Si ottiene:

$$\omega_c = 3$$

$$\varphi_c = -\arctan\left(\frac{3}{0.03}\right) - \arctan\left(\frac{3}{10}\right) - \arctan\left(\frac{3}{30}\right) = $$
$$= -89° - 17° - 6° = -112°$$
$$\Rightarrow \quad \varphi_m = 68°$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte, e risulta:

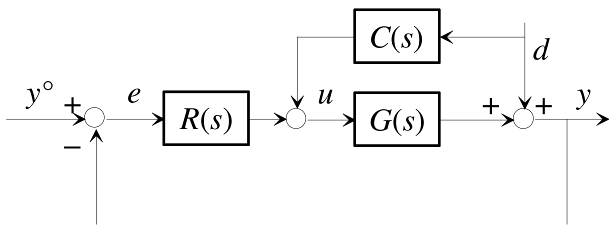
$$L(s) = 100\frac{1-0.1s}{(1+s/0.03)(1+s/30)},$$

da cui:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)} = 100\frac{(1+s)^2}{(1+33.3s)(1+0.33s)}.$$

2.2

Schema a blocchi con compensatore del disturbo:



2.3

Deve risultare:

$$C(j)G(j) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C(j) = -\frac{1}{G(j)} = -\frac{(1+j)^2}{1-0.1j}$$

Esercizio 3

3.1, 3.2

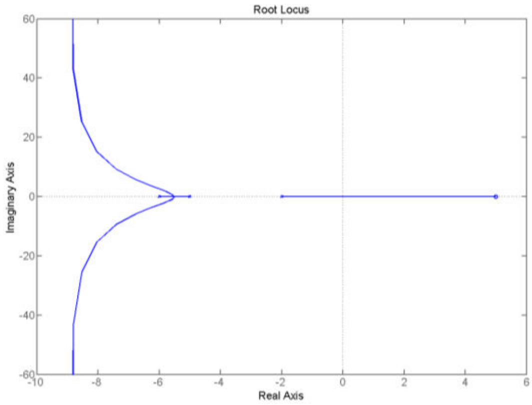
La funzione di trasferimento d'anello è:

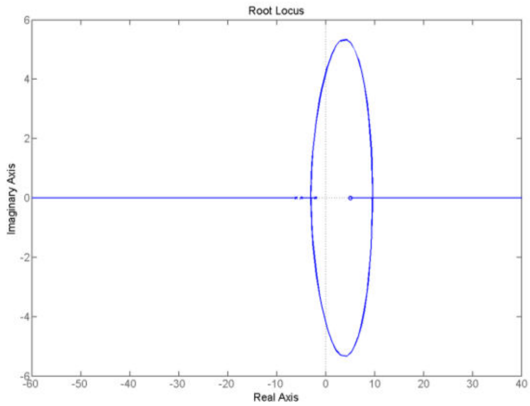
$$L(s) = R(s)G(s) = -0.5\rho \frac{1-0.2s}{(1+0.5s)(1+0.2s)(6+s)} = \rho \frac{s-5}{(s+2)(s+5)(s+6)}$$

Risulta $m=1$, $n=3$, $z_1=5$, $p_1=-2$, $p_2=-5$, $p_3=-6$. Il punto di intersezione degli asintoti è quindi:

$$x_a = \frac{\sum z_i - \sum p_i}{n-m} = \frac{-5-(2+5+6)}{2} -9$$

Luogo diretto: Luogo inverso:





3.3

Per valori di ρ positivi, il valore limite si ottiene punteggiando in $s=0$:

$$\rho_M = \frac{2\cdot 5\cdot 6}{5} = 12.$$

Per valori di ρ negativi, il valore limite si ottiene punteggiando in $s=-13$ (tale valore è ottenuto applicando la regola del baricentro):

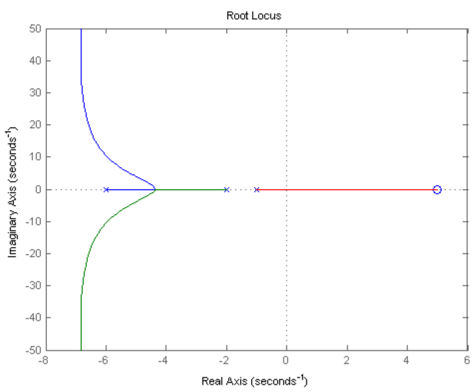
$$\rho_m = -\frac{7\cdot 8\cdot 11}{18} = -\frac{308}{9}.$$

Il sistema è quindi asintoticamente stabile per $-\frac{308}{9} < \rho < 12$.

3.4

Affinché la parte reale dei poli tenda asintoticamente a -7 occorre modificare il luogo diretto in modo tale che l'asintoto verticale intersechi l'asse reale nel punto -7. Il modo più semplice per ottenere il risultato è cancellare uno dei tre poli della $L(s)$ originaria sostituendolo con un nuovo polo tale che risulti $x_a = -7$. Per esempio si può cancellare il polo in -5 sostituendolo con un secondo polo in -1:

$$R(s) = \rho\frac{s+5}{s+1} \quad \Rightarrow \quad L(s) = \rho\frac{s-5}{(s+1)(s+2)(s+6)}$$



Esercizio 4

4.1

La trasformata Zeta della risposta allo scalino unitario è la seguente:

$$Y(z) = G(z)\frac{z}{z-1} = \frac{z}{8z^3 - 12z^2 + 6z - 1}$$

Applicando il metodo di lunga divisione:

$$\begin{array}{l|l}
z & 8z^3 - 12z^2 + 6z - 1 \\
-z + 3/2 - 3/4\,z^{-1} + \ldots & 1/8\,z^{-2} + 3/16\,z^{-3} \\
\hline
3/2 - 3/4\,z^{-1} + \ldots & \\
-3/2 + 9/4\,z^{-1} + \ldots & \\
\hline
3/2\,z^{-1} &
\end{array}$$

Pertanto: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y(2) = \frac{1}{8}$, $y(3) = \frac{3}{16}$.

4.2

Applicando la trasformazione bilineare:

$$z = \frac{1+s}{1-s},$$

si ottiene:

$$8\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^3 - 12\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + 6\left(\frac{1+s}{1-s}\right) - 1 = 0$$

ossia:

$$8(1+s)^3 - 12(1+s)^2(1-s) + 6(1+s)(1-s)^2 - (1-s)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 27s^3 + 27s^2 + 9s + 1 = 0$$

Applicando a questo polinomio il criterio di Routh:

27	9	0
27	1	0
8	0	
1		

si conclude che il sistema è asintoticamente stabile.

4.3

Poiché il sistema è asintoticamente si può applicare il teorema della risposta in frequenza, da cui si ricava la seguente risposta asintotica:

$$y(k) = 4\left|G\left(e^{j3}\right)\right|\sin\left(3k + \angle G\left(e^{j3}\right)\right)$$