Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Prima prova scritta intermedia

Anno accademico 2010/2011

4 Maggio 2011

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Trasformando secondo Laplace le singole equazioni a stato iniziale nullo si ottiene:

$$\begin{cases} sX_1 = -5X_1 - 6X_3 + 2U \\ sX_2 = 6X_1 - X_2 + 6X_3 - 2U \\ sX_3 = X_1 \\ Y = X_1 + X_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ricava l'espressione della funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{4s}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

1.2

Il tipo della funzione di trasferimento vale $g = -1$ (per la presenza di uno zero nell'origine).

Il guadagno della funzione di trasferimento è:

$$\mu = \lim_{s \to 0}\left[s^g G(s)\right] = \lim_{s \to 0} \frac{4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{2}{3}$$

Il guadagno statico del sistema è:

$$G(0) = 0$$

1.3

Il sistema per il calcolo dello stato e dell'uscita di equilibrio è il seguente:

$$\begin{cases} -5\bar{x}_1 - 6\bar{x}_3 + 2\bar{u} = 0 \\ 6\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + 6\bar{x}_3 - 2\bar{u} = 0 \\ \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 = \dfrac{1}{3} \\ \bar{y} = 0 \end{cases}$$

Si osservi che, essendo il guadagno statico nullo, a fronte di un ingresso costante l'uscita è nulla.

1.4

Si può riconoscere facilmente che il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento è fattorizzabile come:

$$G(s) = \frac{4s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

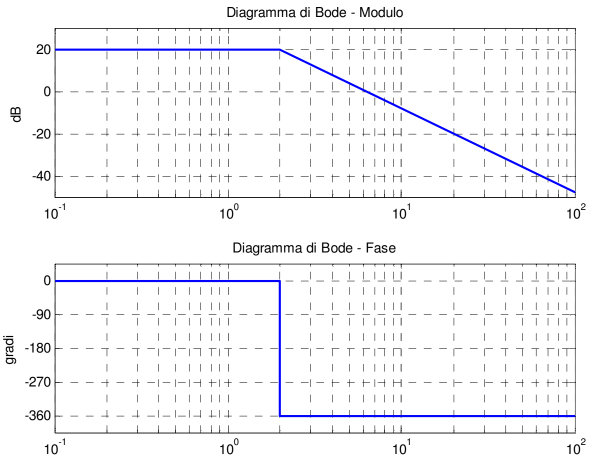
per cui il sistema è asintoticamente stabile. In alternativa si può applicare il criterio di Routh, giungendo al medesimo risultato.

Esercizio 2

2.1

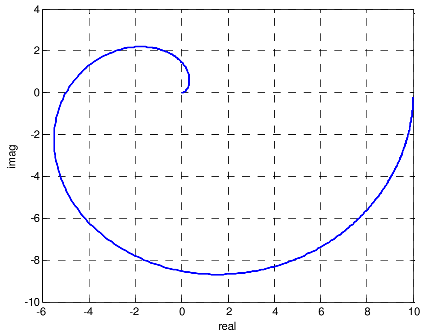
La funzione di trasferimento può essere riscritta nella forma:

$$G(s) = 10\frac{1-0.5s}{(1+0.5s)^3}$$



La funzione di trasferimento ha tipo zero, guadagno pari a 10, tre poli nel semipiano sinistro alla pulsazione 2 e uno zero nel semipiano destro alla stessa pulsazione. I diagrammi asintotici sono riportati a fianco.

2.2



Il diagramma polare si ricava facilmente dai diagrammi di Bode asintotici.

2.3

Il sistema a fase minima presenta la seguente funzione di trasferimento:

$$\tilde{G}(s) = 40\frac{1}{(s+2)^2}.$$

2.4

La risposta allo scalino unitario ha trasformata:

$$Y(s) = \frac{40}{s}\frac{1}{(s+2)^2} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+2} + \frac{\alpha_3}{(s+2)^2} = \frac{\alpha_1(s+2)^2 + \alpha_2 s(s+2) + \alpha_3 s}{s(s+2)^2} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)s^2 + (4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)s + 4\alpha_1}{s(s+2)^2}$$

Con il principio di identità dei polinomi applicato al numeratore si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 10 \\ \alpha_2 = -10 \\ \alpha_3 = -20 \end{cases}$$

Pertanto:

$$Y(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+2} - \frac{20}{(s+2)^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 10 - 10e^{-2t} - 20te^{-2t}, \quad t \geq 0$$

Esercizio 3

3.1

Il sistema meccanico è retto dall'equazione:

$$M\ddot{p}(t) + D\dot{p}(t)^5 + Kp(t)^3 = F(t)$$

Definite le variabili di stato $x_1 = p$, $x_2 = \dot{p}$, la variabile di ingresso $u = F$ e la variabile di uscita $y = p$, le equazioni del sistema dinamico sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{K}{M}x_1(t)^3 - \dfrac{D}{M}x_2(t)^5 + \dfrac{1}{M}u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t)^3 - 5x_2(t)^5 + u(t) \end{cases}$$
$$y(t) = x_1(t)$$

3.2

Ricerca dello stato di equilibrio:

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ -2\bar{x}_1^{\,3} - 5\bar{x}_2^{\,5} + \bar{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 1 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$
$$\bar{y} = \bar{x}_1 = 1$$

3.3

Il sistema linearizzato assume la seguente espressione:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1(t) = \delta x_2(t) \\ \delta\dot{x}_2(t) = -6\bar{x}_1^2\delta x_1(t) - 25\bar{x}_2^4\delta x_2(t) + \delta u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta\dot{x}_1(t) = \delta x_2(t) \\ \delta\dot{x}_2(t) = -6\delta x_1(t) + \delta u(t) \end{cases}$$
$$\delta y(t) = \delta x_1(t)$$

3.4

La funzione di trasferimento del sistema linearizzato è la seguente:

$$G(s) = \frac{\delta Y(s)}{\delta U(s)} = \frac{1}{s^2 + 6} = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

con $\mu = 1/6$, $\omega_n = \sqrt{6}$.

Pertanto:

$$\delta y(t) = 0.05\mu[1 - \cos(\omega_n t)] = 0.00833\left[1 - \cos\left(\sqrt{6}t\right)\right]$$

e

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t) = 1 + 0.00833\left[1 - \cos\left(\sqrt{6}t\right)\right]$$

Esercizio 4

4.1

Il sistema presenta una retroazione, con linea d'andata unitaria e la serie di $G(s)$ e il parallelo tra 1 e $F(s)$ in linea di retroazione. La funzione di trasferimento è quindi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+G(s)[1+F(s)]}$$

4.2

Risulta:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+\frac{1}{s}\left[1+\frac{k}{(1+s)^2}\right]}=\frac{s(1+s)^2}{s(1+s)^2+(1+s)^2+k}=\frac{s(1+s)^2}{s^3+3s^2+3s+1+k}\ ,$$

Occorre studiare la stabilità con il criterio di Routh:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1+k & 0 \\ \frac{8-k}{3} & 0 & \\ 1+k & & \end{array}$$

Affinché tutti gli elementi della prima colonna della tabella siano positivi, deve risultare:

$$-1<k<8$$

4.3

Ricordando che la trasformata di Laplace allo scalino unitario è $U(s) = 1/s$, applichiamo il teorema del valore iniziale:

$$Y(s)=\frac{s(1+s)^2}{s^3+3s^2+3s+1+k}\frac{1}{s}$$

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}[sY(s)]=\lim_{s\to\infty}\frac{s(1+s)^2}{s^3+3s^2+3s+1+k}=1$$

4.4

Per k=1 il sistema è asintoticamente stabile, per cui possiamo applicare il teorema del valore finale:

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}[sY(s)]=\lim_{s\to 0}\frac{s(1+s)^2}{s^3+3s^2+3s+1+k}=0$$