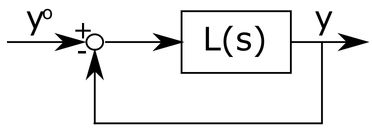
Fondamenti di Automatica
Prof. Luca Bascetta

Soluzioni della seconda prova scritta intermedia
6 luglio 2017

## ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema di controllo di figura, con $y$ variabile controllata e $y^o$ riferimento:




in cui:

$$L(s) = \frac{\mu}{s(1+s)(1+0.2s)(1+0.1s)}$$

1. Si tracci il luogo delle radici al variare di $\mu > 0$.

   La funzione di trasferimento $L(s)$ può essere riscritta, ai fini del tracciamento del luogo delle radici, nella seguente forma:

   $$L(s) = \frac{\rho}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$$

   dove $\rho = 50\mu$. I valori di $\mu$ positivi corrispondono quindi al luogo diretto, quelli negativi al luogo inverso. La funzione di trasferimento non ha zeri e presenta 4 poli ($m = 0, n = 4$), con $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 5$, $p_4 = 10$. Sia il luogo diretto, sia quello inverso, sono quindi caratterizzati da 4 asintoti, che si incontrano nel punto dell'asse reale di ascissa:

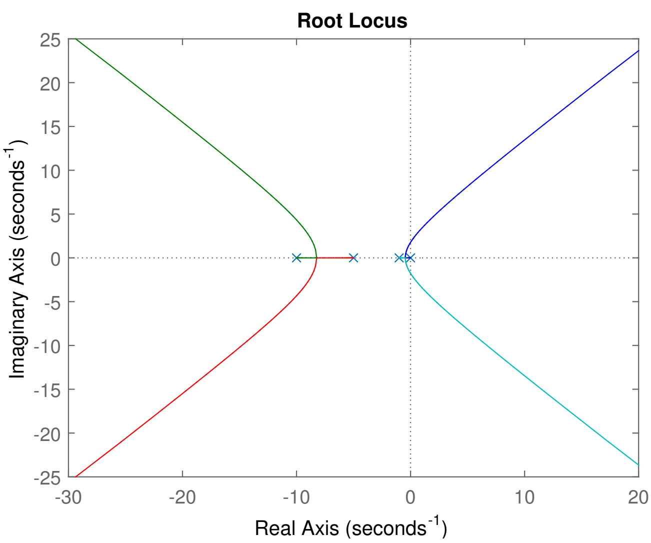
   $$x_a = \frac{\sum_i z_i - \sum_i p_i}{n-m} = \frac{-(0+1+5+10)}{4} = -4$$

   Nel luogo diretto, gli asintoti formano con l'asse reale orientato positivamente i seguenti angoli:

   $$\vartheta_{ah} = \frac{180^\circ + h360^\circ}{n-m} = 45^\circ + h90^\circ$$

   ovvero, con $h = 0, \ldots, 3$, gli angoli $45^\circ$, $135^\circ$, $225^\circ$, $315^\circ$.

   Tenendo conto della regola di appartenenza dei punti dell'asse reale al luogo, il luogo diretto si traccia come in figura:

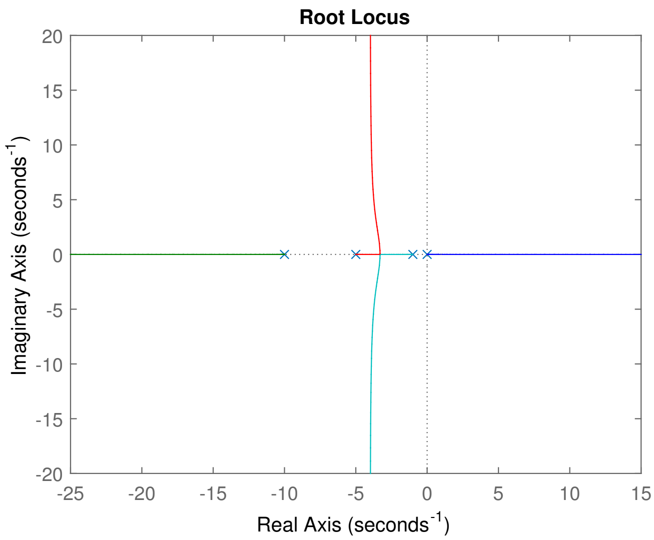


2. Si tracci il luogo delle radici al variare di $\mu < 0$.

   Nel luogo inverso, gli asintoti formano con l'asse reale orientato positivamente i seguenti angoli:

$$\vartheta_{ah} = \frac{h360^\circ}{n-m} = h90^\circ$$

   ovvero, con $h = 0, \ldots, 3$, gli angoli $0^\circ$, $90^\circ$, $180^\circ$, $270^\circ$. Il luogo inverso si traccia come in figura:




3. Si determini con il luogo delle radici il valore $\bar{\mu}$ di $\mu$ per cui uno dei poli in anello chiuso si trova nel punto $\bar{s} = -0.2$, spiegando se per tale valore il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

   Il punto $\bar{s} = -0.2$ appartiene al luogo diretto. Il corrispondente valore di $\rho$, positivo, si ottiene con la regola di punteggiatura:

$$\bar{\rho} = 0.2 * 0.8 * 4.8 * 9.8 = 7.5264$$

   da cui:

$$\bar{\mu} = \bar{\rho}/50 = 7.5264/50 = 0.15$$

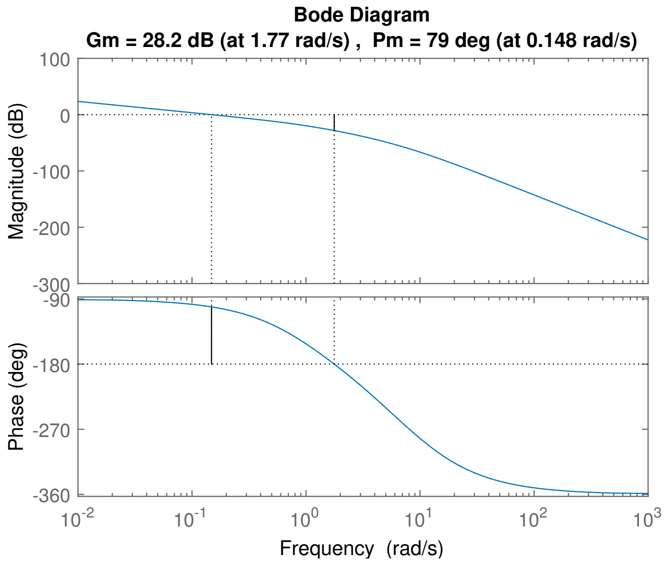
   Con questo valore di $\mu$ il sistema in anello chiuso è certamente asintoticamente stabile, poiché i due poli più vicini all'origine del piano complesso sono reali, e quindi a parte reale negativa, mentre gli altri due sono sempre a parte reale negativa.

4. Con il valore di $\bar{\mu}$ determinato al punto precedente, si tracci l'andamento qualitativo della risposta di $y$ a uno scalino unitario in $y^o$.

   La funzione di trasferimento d'anello risulta in questo caso:

$$L(s) = \frac{0.15}{s(1+s)(1+0.2s)(1+0.1s)}$$

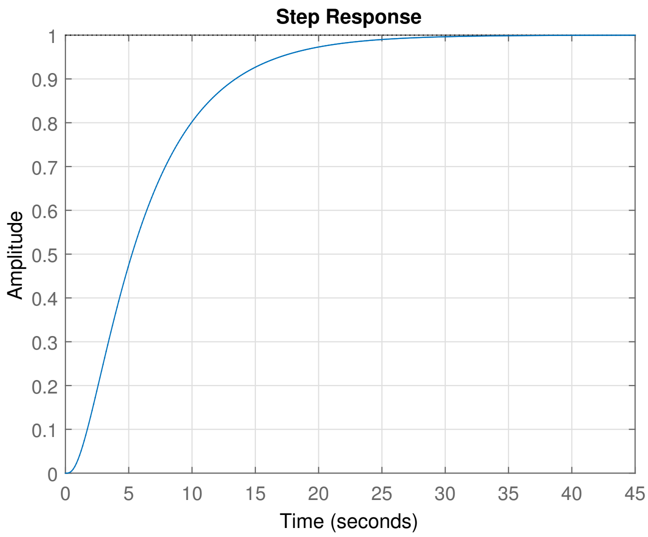
   Il tracciamento del diagramma di Bode del modulo prevede un tratto iniziale di pendenza $-1$ che taglia l'asse a 0 dB alla pulsazione 0.15 e quindi tre poli alle pulsazioni 1, 5 e 10. La pulsazione critica è quindi approssimativamente $\omega_c = 0.15$ mentre il margine di fase è sicuramente molto elevato visto l'ampio tratto di pendenza $-1$ intorno alla pulsazione critica.




Ne consegue che la funzione di trasferimento in anello chiuso è approssimabile come:

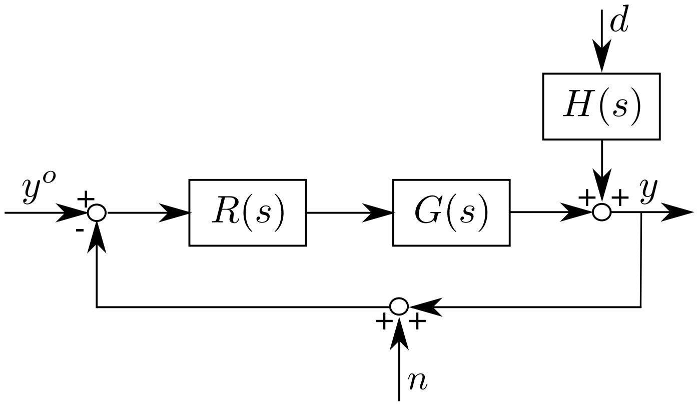
$$F(s) \approx \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_c}} = \frac{1}{1+\frac{s}{0.15}} = \frac{1}{1+6.66s}$$

La risposta allo scalino è costituita da un esponenziale con costante di tempo 6.66:



**ESERCIZIO 2**

Si consideri il seguente sistema di controllo, con $y$ variabile controllata, $y^o$ riferimento, $d$ disturbo non misurabile sulla linea di andata e $n$ disturbo di misura:




dove

$$G(s) = \frac{10}{s\,(1+0.1s)\,(1+10s)} \qquad\qquad H(s) = \frac{5}{1+0.2s}$$

1. Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

   - con riferimento $y^{\circ}(t) = sca(t)$, disturbo $d(t) = 2ram(t)$ e in assenza di disturbo $n(t)$, l'errore $e(t) = y^{\circ}(t) - y(t)$ soddisfi la limitazione, a transitorio esaurito, $|e_\infty| < 0.15$.
   - Il disturbo $n(t) = N\sin(\omega t)$, con $N$ ampiezza arbitraria e $\omega \geq 10\ rad/s$, sia attenuato sull'uscita $y$ di un fattore almeno pari a 10;
   - Il margine di fase $\varphi_m$ sia maggiore o uguale di 65°;
   - La pulsazione critica $\omega_c$ sia maggiore o uguale di 1 $rad/s$.

   $G(s)$ ha tipo unitario, è quindi sufficiente un regolatore con tipo $g_R$ nullo per avere una funzione di trasferimento d'anello che abbia tipo $g_L$ unitario, ovvero che dia origine ad errore nullo a transitorio esaurito a fronte di un segnale di riferimento a scalino ed errore finito a fronte di un disturbo $d$ a rampa.
   Calcoliamo, quindi, l'errore dovuto al disturbo $d$

$$e_{\infty_d} = \lim_{s\to 0} s\frac{H(s)}{1+L(s)}\frac{2}{s^2} = \lim_{s\to 0}\frac{5}{1+\frac{10\mu_R}{s^{g_R+1}}}\frac{2}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{10}{s+10\mu_R} = \frac{1}{\mu_R}$$

   Per soddisfare la specifica dovremo porre

$$\mu_R \geq \frac{1}{0.15} \approx 6.67$$

   Scegliendo $\mu_R = 10$ il progetto statico si conclude con

$$R_1(s) = 10$$

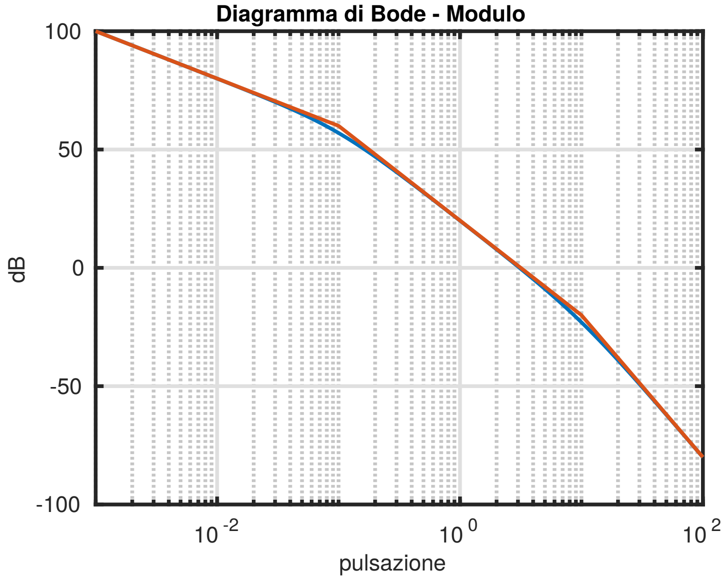
   Il requisito di attenuazione del disturbo in linea di retroazione comporta che:

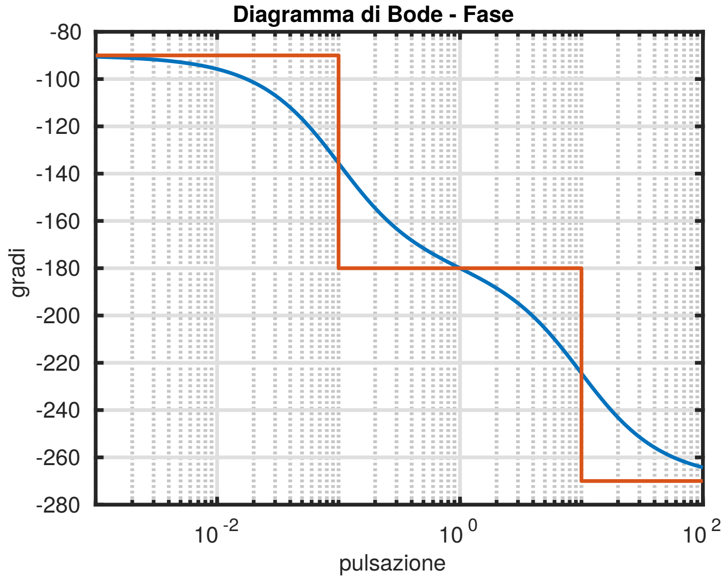
$$|L(j\omega)|_{dB} \leq -20\ dB \qquad \omega \geq 10\ rad/s$$

   Per il progetto dinamico, consideriamo la funzione di trasferimento:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{100}{s\,(1+0.1s)\,(1+10s)}$$

   I diagrammi asintotici di $L_1(s)$ sono riportati di seguito:




Per il tracciamento del modulo di $L$ si osservi che, supponendo $\omega_c = 1$, occorrerà introdurre due poli in 0.01, due zeri in 0.1 ed un polo in 10, mantenendo inoltre quello già presente in $L_1$.
La funzione di trasferimento d'anello risulta quindi:

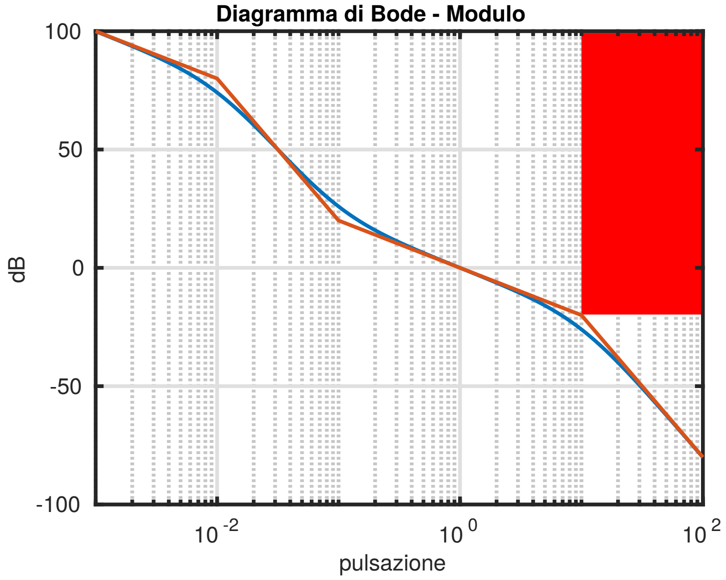
$$L(s) = \frac{100\,(1+10s)^2}{s\,(1+100s)^2\,(1+0.1s)^2}$$

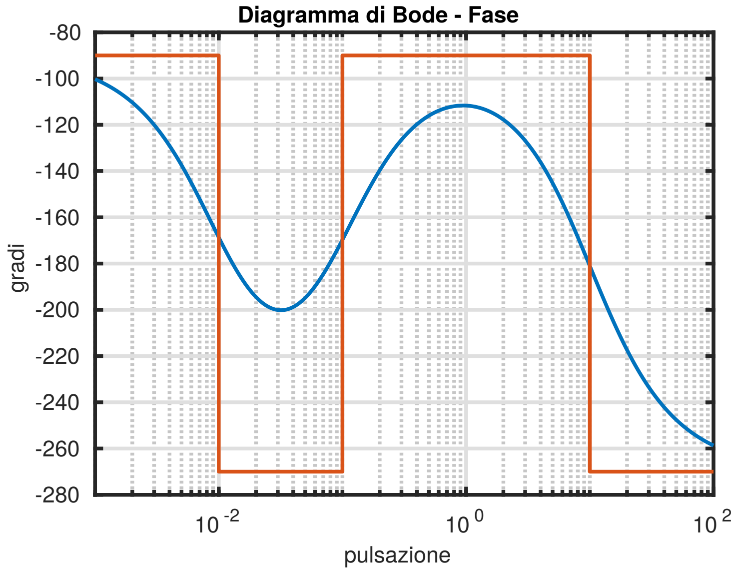
La fase critica e il margine di fase valgono:

$$\varphi_c = -90^\circ + 2\arctan(10) - 2\arctan(100) - 2\arctan(0.1) \approx -111.70^\circ$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| \approx 68.30^\circ$$

e soddisfano entrambi le specifiche. Anche il vincolo sull'attenuazione del disturbo in retroazione è soddisfatto.
I diagrammi asintotici di $L(s)$ sono riportati di seguito:



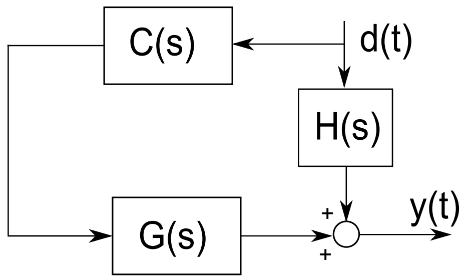




L'espressione della funzione di trasferimento del controllore è:

$$R(s) = \frac{10\,(1+10s)^3}{(1+100s)^2\,(1+0.1s)}$$

2. Supponendo ora che il disturbo $d(t)$ sia misurabile, si disegni un possibile schema per la compensazione diretta di tale disturbo e si scriva (senza dettagliare i conti) la condizione che dovrebbe soddisfare un compensatore $C(s)$ per annullare esattamente l'effetto sull'uscita di regime dovuto al segnale $d(t) = 0.5sin(t)$. Per semplicità, si supponga in quest'analisi che $y^{\circ}(t) = n(t) = 0$.

   Lo schema per la compensazione diretta del disturbo $d$ è disegnato in figura.



In base a tale schema, la condizione da imporre per la compensazione di $d$ è:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s) + C(s)G(s) = 0$$

da cui deriva la condizione "ideale" per la definizione del compensatore:

$$C(s) = -\frac{H(s)}{G(s)}$$

Questa formula non può essere direttamente utilizzata in questo caso, perché dà luogo a un compensatore non realizzabile (più zeri che poli, essendo G(s) strettamente propria). Tuttavia, sapendo che $d(t) = 0.5sin(t)$, $C(s)$ potrà essere una qualunque funzione di trasferimento che soddisfi la condizione:

$$C(j) = -\frac{H(j)}{G(j)}$$

**ESERCIZIO 3**
Si supponga di avere effettuato il progetto del regolatore analogico

$$R^o(s) = \frac{0.1}{s}$$

1. Mediante il metodo della trasformazione di Tustin (o del trapezio), si determini la funzione di trasferimento $R(z)$ del regolatore digitale ottenuto per discretizzazione, con generico periodo di campionamento $T_C$, dal regolatore $R^o(s)$.

   Per ricavare la funzione di trasferimento del regolatore digitale discretizzando $R^o(s)$ mediante la cosiddetta trasformazione di Tustin (che è la più generale trasfomazione bilineare con $\alpha = 0.5$):

$$s = \frac{2}{T_C}\frac{z-1}{z+1}$$

   è sufficiente sostituire alla variabile complessa $s$ in $R^o(s)$ l'espressione di $s$ in funzione della variabile complessa $z$:

$$R(z) = R^o\left(\frac{2}{T_C}\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{0.05T_C(z+1)}{z-1}$$

2. Con riferimento al regolatore digitale $R(z)$ determinato al punto precedente, si espliciti la legge di controllo che esprime il legame nel tempo tra la variabile di controllo $u^*(k)$ e l'errore $e^*(k)$.

   Essendo

$$R(z) = \frac{U^*(z)}{E^*(z)}$$

   si può esprimere il legame tra le Trasformate Zeta dell'uscita e dell'ingresso del regolatore digitale utilizzando l'espressione della funzione di trasferimento del regolatore come:

$$\frac{U^*(z)}{E^*(z)} = \frac{0.05T_C(1+z^{-1})}{1-z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad U^*(z)(1-z^{-1}) = E^*(z)(0.05T_C(1+z^{-1}))$$

   cosicchè, ricordando il significato operatoriale di $z^{-1}$, ritardo unitario, si può esprimere la medesima relazione nel dominio del tempo discreto:

$$u^*(k) = u^*(k-1) + 0.05T_C e^*(k) + 0.05T_C e^*(k-1)$$

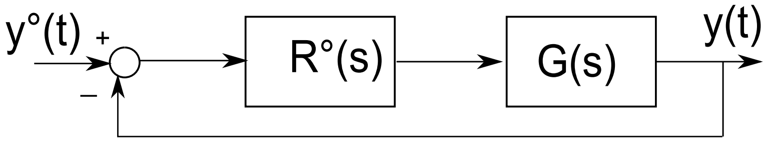
3. Si chiarisca, giustificando la risposta, se la legge di controllo ottenuta al punto precedente corrisponde ad un regolatore digitale strettamente proprio.

   No, il regolatore digitale $R(z)$ non è strettamente proprio (avendo infatti un numero uguale di zeri e poli) e questo corrisponde, nella legge di controllo nel tempo, al fatto che $u^*(k)$ dipende anche dall'errore $e^*(k)$, allo stesso istante $k$.

4. Si determini, giustificando opportunamente la propria scelta, un valore adeguato per il periodo di campionamento $T_C$, supponendo che il sistema da controllare abbia funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100}{1+s}$$

   e il sistema di controllo analogico in anello chiuso, usato per il progetto di $R^o(s) = \frac{0.1}{s}$, sia quello di figura.




Come noto, la pulsazione di Nyquist va scelta decisamente superiore alla pulsazione critica. Si è visto che un adeguato criterio di scelta della pulsazione di Nyquist in funzione della banda del sistema di controllo è:

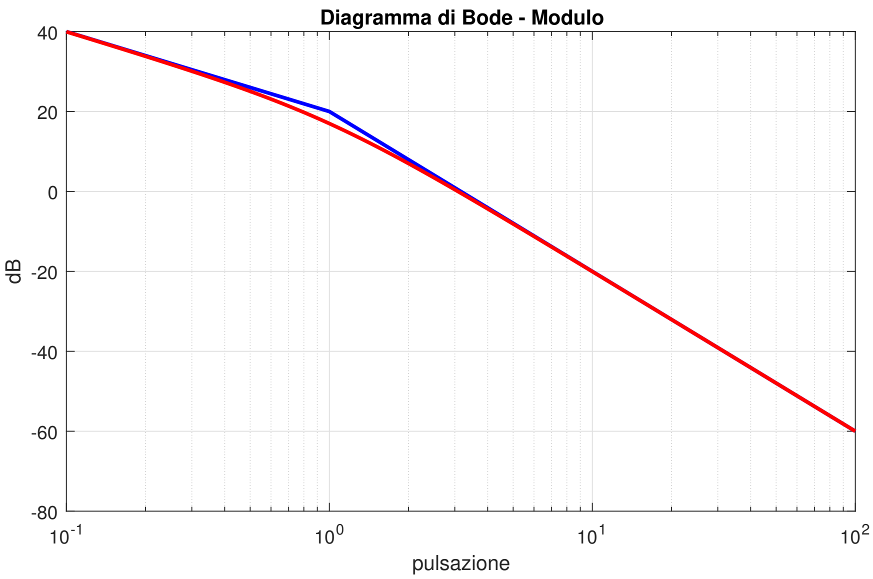
$$\Omega_N = 10\omega_C$$

da cui si ricava, sapendo che $\Omega_C = 2\Omega_N$, il valore del periodo di campionamento:

$$T_C = \frac{2\pi}{\Omega_C}$$

La funzione di trasferimento d'anello del sistema di controllo analogico assegnato è:

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{0.1}{s}\frac{100}{1+s} = \frac{10}{s(1+s)}$$




e dal diagramma di Bode del modulo in figura si può leggere il valore di $\omega_C \cong 3\ rad/s$. Ponendo $\Omega_C = 2\Omega_N = 20\omega_C = 60\ rad/s$, il valore da scegliere per il periodo di campionamento è dunque

$$T_C = \frac{2\pi}{\Omega_C} = 0.1\ s.$$