Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Prima prova scritta intermedia

Anno accademico 2012/2013

4 Maggio 2013

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Le equazioni che determinano lo stato di equilibrio sono:

$$\begin{cases} -2\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 + 5\bar{u} = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{u} = \frac{2}{5}\bar{x}_1 = 2$$

1.2

Il sistema è descritto dalle matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathbf{K}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{K}_R) = 0$$

La matrice di osservabilità è:

$$\mathbf{K}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{K}_O) \neq 0$$

Il sistema è quindi completamente osservabile ma non completamente raggiungibile.

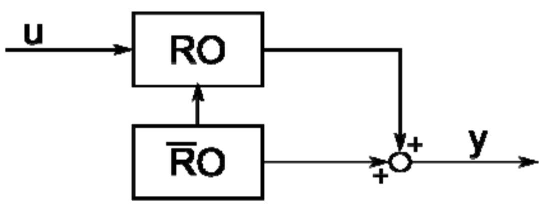
1.3

La funzione di trasferimento del sistema è:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{5(s-1)}{(s+2)(s-1)} = \frac{5}{(s+2)}$$

Il sistema è instabile, avendo un autovalore in +1. Questo autovalore non diventa polo della funzione di trasferimento poiché il sistema non è raggiungibile e osservabile.

1.4



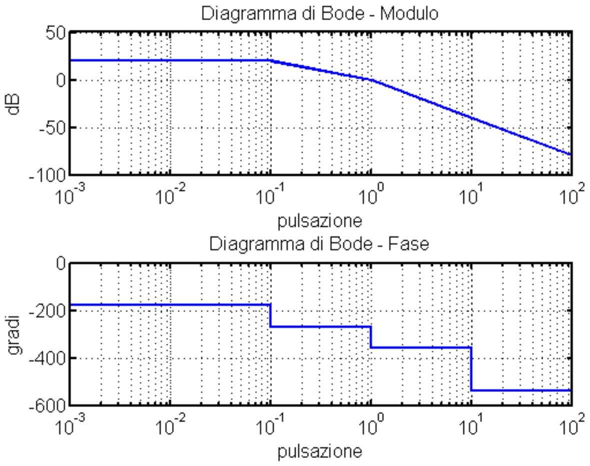
La funzione di trasferimento è associata alla sola parte raggiungibile e osservabile.

Esercizio 2

2.1

La funzione di trasferimento può essere riscritta nella forma:

$$G(s) = -10\frac{1-0.1s}{(1+10s)(1+s)(1+0.1s)}$$



La funzione di trasferimento ha tipo zero, guadagno pari a –10, tre poli nel semipiano sinistro alle pulsazioni 0.1, 1 e 10, e uno zero nel semipiano destro alla pulsazione 10. I diagrammi asintotici sono riportati a fianco.

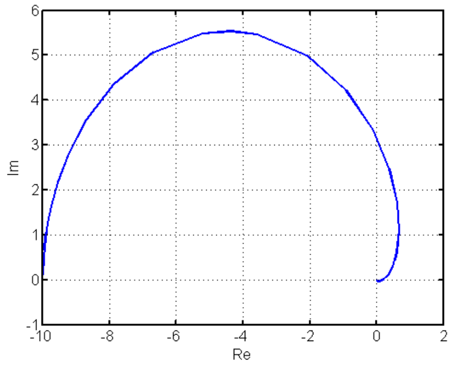
2.2

Funzione di trasferimento a fase minima:

$$\tilde{G}(s) = 10\frac{1}{(1+s)(1+10s)} = \frac{1}{(s+1)(s+0.1)}$$

2.3

Il diagramma polare si ricava facilmente dai diagrammi di Bode asintotici (si osservi che la fase asintoticamente vale –540°):



2.4

Il sistema è asintoticamente stabile, per cui è applicabile il teorema della risposta in frequenza. A transitorio esaurito risulta quindi:

$$y(t) = -10*0.1 + |G(j)|*5*\sin(t + \angle G(j))$$

con:

$$G(j) = -10\frac{1-0.1j}{(1+j)(1+0.1j)(1+10j)} = \left\langle \begin{array}{l} |G(j)| = 10\dfrac{|1-0.1j|}{|1+j||1+0.1j||1+10j|} = \dfrac{10}{\sqrt{202}} \approx 0.704 \\ \angle G(10j) = -\pi + \angle(1-0.1j) - \angle(1+j) - \angle(1+0.1j) - \angle(1+10j) \approx -5.597 \end{array} \right.$$

Pertanto:

$y(t) = -1 + 3.52\sin(t - 5.597)$

Esercizio 3

3.1

Gli stati di equilibrio si ottengono risolvendo le equazioni:

$$\begin{cases} 2 + \alpha\sin(\bar{x}_2) - 2\bar{x}_3 = 0 \\ -\bar{x}_1 + 2\bar{u} = 0 \\ 2 + \bar{x}_2 - 2\bar{x}_3^{\,2} = 0 \end{cases}$$

Una possibile soluzione, con $\bar{u} = 0$, è evidentemente $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 1$ e $\bar{y} = 1$.

3.2

Linearizzando il sistema si ha:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \alpha\cos(\bar{x}_2)\delta x_2 - 2\delta x_3 \\ \delta\dot{x}_2 = -\delta x_1 + 2\delta u \\ \delta\dot{x}_3 = \delta x_2 - 4\bar{x}_3\delta x_3 \end{cases}$$
$$\delta y = \delta x_3$$

Nello stato di equilibrio:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0$$

Il polinomio caratteristico della matrice ***A*** è quindi:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -\alpha & 2 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s+4 \end{vmatrix} = s^2(s+4) - 2 + \alpha(s+4) = s^3 + 4s^2 + \alpha s + 2(2\alpha - 1)$$

Applicando il criterio di Routh:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \alpha & 0 \\ 4 & 2(2\alpha-1) & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \\ 2(2\alpha-1) & & \end{array}$$

Il sistema linearizzato è asintoticamente stabile per $\alpha > 1/2$.

3.3

La funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 2 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2s}{s^3 + 4s^2 + s + 2}$$

3.4

Il sistema ha tipo $g = -1$ e guadagno $\mu = 1$.

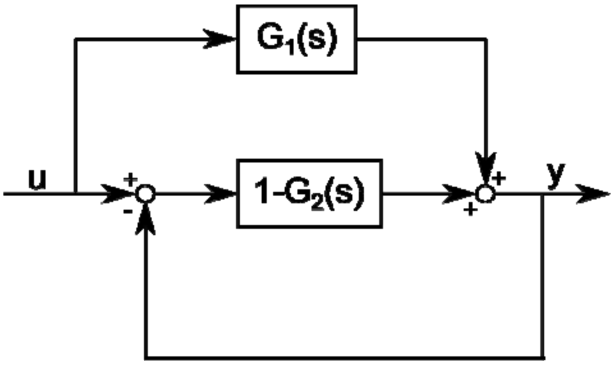
Esercizio 4

4.1

Poiché $G_1(s)$ non è chiusa in un anello di retroazione, è necessario che sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema nel suo complesso.

4.2

Lo schema a blocchi si può riformulare come segue:



$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{[1-G_2(s)]+G_1(s)}{1+[1-G_2(s)]}=\frac{1+G_1(s)-G_2(s)}{2-G_2(s)}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1+\frac{2}{s-1}-\frac{s+2}{s}}{2-\frac{s+2}{s}}=\frac{2}{s^2-3s+2}=\frac{2}{(s-1)(s-2)}$$

4.3

La risposta allo scalino unitario ha trasformata:

$$Y(s)=\frac{2}{s(s-1)(s-2)}=\frac{\alpha_1}{s}+\frac{\alpha_2}{s-1}+\frac{\alpha_3}{s-2}=\frac{\alpha_1(s-1)(s-2)+\alpha_2 s(s-2)+\alpha_3 s(s-1)}{s(s-1)(s-2)}$$

Con il metodo dei residui si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 2\alpha_1=2 \\ -\alpha_2=2 \\ 2\alpha_3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=-2 \\ \alpha_3=1 \end{cases}$$

Pertanto:

$$Y(s)=\frac{1}{s}-2\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2} \quad \Rightarrow \quad y(t)=1-2e^t+e^{2t}, \quad t\geq 0$$

4.4

Valutando la risposta per t=0:

$$y(0)=1-2+1=0$$

Con il teorema del valore iniziale:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}[sY(s)]=\frac{2s}{s(s-1)(s-2)}=0$$