Fondamenti di Automatica

(Prof. Bascetta)

Prima prova scritta intermedia - 5 Maggio 2015

Anno accademico 2014/2015

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Il sistema è descritto dalle matrici:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\boldsymbol{K}_R = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\boldsymbol{K}_R) = -4$$

Il sistema è quindi completamente raggiungibile per ogni valore di α.

1.2

La matrice di osservabilità è:

$$\mathbf{K}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & {\mathbf{A}^T}^2\mathbf{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{K}_O) = 2$$

Il sistema è quindi completamente osservabile per ogni valore di α.

1.3

Il polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}$ è:

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\alpha & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+1) - 2\alpha = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 - 2\alpha$$

Occorre studiare la stabilità con il criterio di Routh:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2-2\alpha & 0 \\ \dfrac{18+2\alpha}{4} & 0 & \\ 2-2\alpha & & \end{array}$$

Affinché tutti gli elementi della prima colonna della tabella siano positivi, deve risultare:

$$\begin{cases} 18+2\alpha > 0 \\ 2-2\alpha > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -9 < \alpha < 1$$

1.4

Effettuando un cambiamento di variabili di stato $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Tx}$ si ottiene una nuova matrice $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{TAT}^{-1}$ che è simile alla matrice $\boldsymbol{A}$, e quindi ha gli stessi autovalori: ne consegue che la stabilità del sistema, che è legata solo agli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$, non dipende dal cambiamento di variabili di stato e quindi è proprietà strutturale.

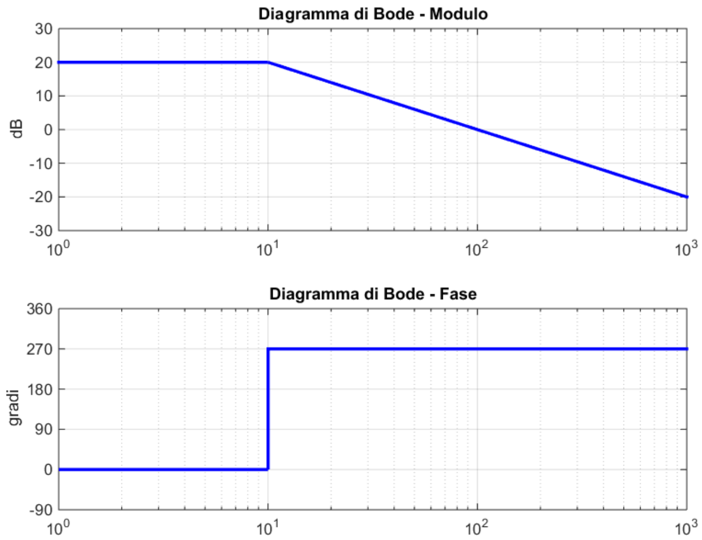
Esercizio 2

2.1

La risposta in frequenza è la funzione $G(j\omega)$, per $\omega \geq 0$.

La definizione si applica a qualsiasi sistema dinamico lineare tempo invariante.

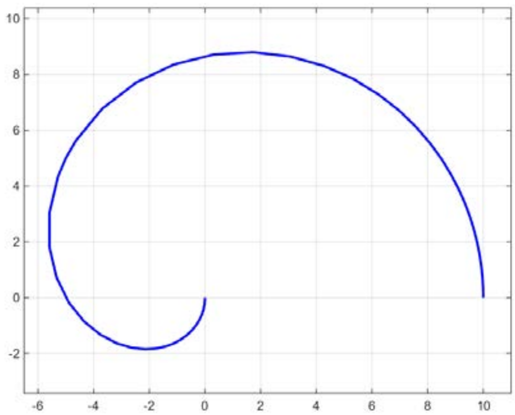
2.2



La funzione di trasferimento ha tipo zero, guadagno pari a 10, due poli nel semipiano destro e uno zero nel semipiano sinistro alla pulsazione 10. I diagrammi asintotici sono riportati a fianco:

2.3

Il diagramma polare si ricava dai diagrammi di Bode asintotici (si osservi che la fase aumenta da 0° fino a 270°):



2.4

Anzitutto il sistema non è asintoticamente stabile per cui non si può applicare il teorema della risposta sinusoidale.

Modulo e fase della risposta in frequenza alla pulsazione 100 valgono:

$$|G(j)| = 10\frac{|1+10j|}{|1-10j|^2} \cong \frac{10}{\sqrt{101}} \approx 1$$

$$\angle G(j) = \angle(1+10j) - 2\angle(1-10j) = \arctan(10) - 2\arctan(-10) = 3\arctan(10) \approx 253°$$

Esercizio 3

3.1

Detta x_1 la corrente nel primo induttore e x_2 la corrente nel secondo induttore risulta:

$$\begin{cases} u = L\dot{x}_1 + R(x_1 - x_2) \\ R(x_1 - x_2) = L\dot{x}_2 + x_2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{R}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{L}x_2^3 \end{cases}$$

$$y = x_2^3$$

3.2

Con i valori numerici dei parametri assegnati si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 3x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

$$y = x_2^3$$

Ricerca dello stato di equilibrio:

$$\begin{cases} -3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \\ 3\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 - \bar{x}_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\bar{x}_2^3 + \bar{u} = 0 \\ 3\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 - \bar{x}_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 12 \\ \bar{x}_2 = 3 \end{cases}$$

$$\bar{y} = \bar{x}_2^3 = 27$$

3.3

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -3\delta x_1 + 3\delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = 3\delta x_1 - 3\delta x_2 - 3\bar{x}_2^2\delta x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -3\delta x_1 + 3\delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = 3\delta x_1 - 30\delta x_2 \end{cases}$$

$$\delta y = 27\delta x_2$$

3.4

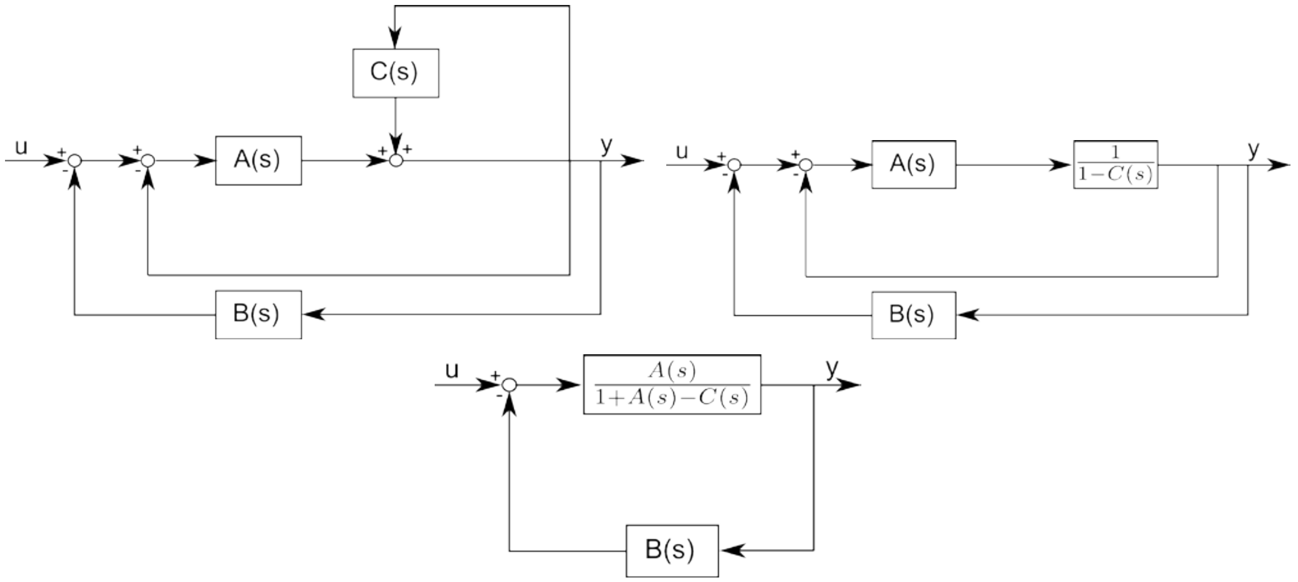
Le istruzioni MATLAB sono le seguenti:

```
A = [-3,3;3,-30];
B = [1;0];
C = [0,27];
sist = ss(A,B,C,0);
step(sist)
```

Esercizio 4

4.1

Elaborando lo schema a blocchi si ottiene:



$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{A(s)}{1-C(s)+A(s)}}{1+\dfrac{A(s)B(s)}{1-C(s)+A(s)}}=\frac{A(s)}{1-C(s)+A(s)[1+B(s)]}$$

4.2

Poiché $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ sono chiuse in anelli di retroazione, non è né necessario né sufficiente che siano asintoticamente stabili perché lo sia il sistema nel suo complesso.

4.3

Con le scelte fatte risulta:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\alpha s(s-1)}{(s+1)(s^2-s+\alpha)}$$

Per la condizione necessaria che, applicata al polinomio di secondo grado risulta essere anche sufficiente, non esistono valori di α per cui il sistema sia asintoticamente stabile.

4.4

Per α=1 si ottiene:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s(s-1)}{(s+1)(s^2-s+1)}$$

Con il teorema del valore iniziale si ha:

$$y(0)=\lim_{s\to\infty}[sY(s)]=\lim_{s\to\infty}s\frac{s(s-1)}{(s+1)(s^2-s+1)}\frac{1}{s}=0$$

Non sono invece verificate le ipotesi di applicabilità del teorema del valore finale.